УДК 514.764

Т.Г. Аленина

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары)

Пространства аффинно-метрической связности

Изучаются вопросы двойственной геометрии нормализованного пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$. В частности, вводятся в рассмотрение двойственные пространства аффинно-метрической связности $\overset{p}{\mathrm{M}}_{n,n}$, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинно-метрической связости $\mathrm{M}_{n,n}$.

Ключевые слова: пространство аффинно-метрической связности, невырожденная нормализация, гармоническая нормализация.

В работе индексы пробегают следующие значения:

$$i, j, k, l, s, t = \overline{1,n};\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,n};\ a = 1,2,3;\ p = \overline{1,4}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^i, \theta^i_j\}$ [1], r^i_{st}, r^i_{jst} — тензоры соответственно кручения и кривизны этого пространства.

Известно [2], что система из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$, где

$$\omega_0^i = \theta^i, \; \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_k^k,$$

$$\omega_j^i = \theta_j^i - \frac{1}{n+1}\delta_j^i\theta_k^k, \; \omega_j^0 = 0,$$

определяет пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$. При этом пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ вырождается в проективное пространство P_n тогда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ является аффинным A_n.

Нормализация [3] пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ полем ковектора c_i^0 ($dc_i^0 + c_i^0\omega_0^0 - c_k^0\omega_i^k = c_{ij}^0\omega_0^j$), то есть полем гиперплоскостей $c_k^0 x^k - x^0 = 0$, равносильна нормализации соответствующего пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ тем же полем ковектора $\left(dc_i^0 - c_k^0\theta_i^k = c_{ik}^0\theta^k\right)$, то есть полем нормализующих гиперплоскостей $c_k^0 X^k - 1 = 0$, где $X^k = \dfrac{x^k}{x^0}$ — неоднородные координаты точек нормализующей гиперплоскости относительно репера $R = \{\mathrm{A}_0, \vec{e}_k\}$.

Будем считать, что нормализация пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ (а следовательно, и пространства $\mathrm{A}_{n,n}$) — невырожденная; это равносильно тому, что тензор $a_{ij}^0 \overset{def}{=} c_{ij}^0 - c_i^0 c_j^0$ невырожден: $b \overset{def}{=} \left|a_{ij}^0\right| \neq 0.$ Функция b есть относительный инвариант: $d\ln b + 2(n+1)\omega_0^0 = b_k\omega_0^k$.

Нормализацию пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ с полем симметричного тензора a^0_{ij} по аналогии с нормализованным P_n [3] назовем гармонической.

Согласно работе [4], невырожденная нормализация пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ индуцирует три пространства проективной связности $\overset{2}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственные относительно соответствующих инволютивных преобразований $J_a, a = 1,2,3 (J_a \equiv J_a^{-1})$ форм связности $\overset{p}{\omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ как между собой, так и по отношению к нормализованному пространству $\overset{1}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \mathrm{P}_{n,n}$. Например, преобразование J_1 имеет вид

$$\overset{2}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0,\ \overset{2}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0 + \left(2c^0_k - \frac{1}{n+1} b_k\right)\omega^k_0,$$

$$\overset{2}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \left[a^{is}_0\left(a^0_{sjk} - c^0_s a^0_{kj}\right) - \left(\delta^i_k c^0_j + \delta^i_j \frac{1}{n+1} b_k\right)\right]\omega^k_0,$$

$$\overset{2}{\omega}{}^0_i = \omega^0_i (\equiv 0) + \left[-3c^0_i c^0_k + a^{sl}_0 c^0_s \left(a^0_{lik} - c^0_l a^0_{ki}\right) - 2a^0_{[ik]}\right]\omega^k_0.$$

Замечание 1. Можно показать, что в случае $\mathrm{A}_{n,n} \equiv \mathrm{A}_n$ пространство $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n}$ (или $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$), индуцируемое невырожденной нормализацией аффинного пространства A_n, будет проективным тогда и только тогда, когда данная нормализация есть гармоническая; при этом $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \overset{2}{\mathrm{P}}_n$, $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \mathrm{P}_n$.

Замечание 2. В случае аффинной нормализации пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ ($c^0_{\bar{i}} \equiv 0$, при этом нормализующая гиперплоскость Π_{n-1} в каждом слое является несобственной) тензор $a^0_{ij} \equiv 0$; при этом вести речь о пространствах $\overset{2}{\mathrm{P}}_{n,n} \div \overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$ нет смысла.

Имеют место следующие предложения.

Теорема 1. *С пространством аффинной связности* $A_{n,n}$*, нормализованным полем ковектора* $c_{\bar{i}}^{0}$ *невырожденным образом, ассоциируются четыре пространства проективной связности* $\overset{p}{P}_{n,n}$*, нормализованные невырожденным образом полем ковектора* $c_{\bar{i}}^{0}\,(c_0^0=-1)$*, причем эти пространства попарно двойственны относительно трех инволютивных преобразований* J_a *форм связности; при этом гармоничность нормализации одного из пространств* $\overset{p}{P}_{n,n}$ *влечет гармоничность нормализации других.*

Замечание. В общем случае (например, при $a_{[ij]}^{0}\neq 0$) теорема 1 остается в силе и в случае $A_{n,n}\equiv A_n$.

Теорема 2. *При невырожденной нормализации пространства аффинной связности* $A_{n,n}$ *индуцируются четыре двойственные между собой (относительно инволютивных преобразований J_a) пространства аффинной связности* $\overset{p}{A}_{n,n}$*, определяемые системами форм* $\left\{\theta^i,\overset{p}{\theta}{}^i_j\right\}$*, где*

$$\overset{p}{\theta}{}^i_j=\overset{p}{\omega}{}^i_j-\delta^i_j\left(\overset{p}{\omega}{}^0_0-c_k^0\omega_0^k\right)+c_j^0\omega_0^i.$$

Теорема 3. *Аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$*, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $A_{n,n}$*, являются обобщенно сопряженными [3] относительно поля тензора* a_{ij}^{0}*.*

Теорема 4. *Пространства* $\overset{1}{A}_{n,n}$ *и* $\overset{2}{A}_{n,n}$*, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связ-*

ности $A_{n,n}$*, могут быть пространствами с абсолютным параллелизмом лишь одновременно.*

Теорема 5. *Если из четырех пространств аффинной связности* $\overset{p}{A}_{n,n}$*, индуцируемых невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $A_{n,n}$*, любые три — без кручения, то четвертое пространство также имеет нулевое кручение.*

Известно [5], что пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ называется пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик. Доказано [6]: критерием того, что $P_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов Q_{n-1}

$$a_{ij}x^i x^j + \frac{1}{c}\left(g_{i0}x^i + cx^0\right)^2 = 0,\ a_{ij} = a_{ji},\ g_{i0} = g_{0i},\ c = const \neq 0, (1)$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega_i^k - c\omega_i^0 = a_{ik}\omega_0^k,$$

$$da_{ij} - a_{ik}\omega_j^k - a_{kj}\omega_i^k = -\frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)\omega_0^k;$$

при этом форма ω_0^0 — главная: $\omega_0^0 = -\frac{1}{c}g_{k0}\omega_0^k$.

Известно [6], что наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (1) приводит к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $K_{n,n}$:

$$R_{0st}^0 + \frac{1}{c}g_{k0}R_{0st}^k = 0,\ g_{k0}R_{ist}^k + a_{ik}R_{0st}^k + cR_{ist}^0 = 0,$$

$$a_{ik}R_{jst}^k + a_{kj}R_{ist}^k - \frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)R_{0st}^k = 0.$$

Согласно работе [7], пространство $A_{n,n}$ называется пространством аффинно-метрической связности, если пространство проективной связности $P_{n,n}$, ассоциированное с исходным пространством аффинной связности $A_{n,n}$, является пространством проективно-метрической связности.

Ниже пространство аффинно-метрической связности обозначим через $M_{n,n}$.

С пространством аффинной связности $\overset{p}{A}_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $\overset{p}{\Pi}_{n,n}$, определяемое системой пфаффовых форм $\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ по схеме

$$\overset{p}{\Omega}{}^{i}_{0}=\overset{p}{\theta}{}^{i}\equiv\theta^{i},\ \overset{p}{\Omega}{}^{0}_{0}=-\frac{1}{n+1}\overset{p}{\theta}{}^{k}_{k},\ \overset{p}{\Omega}{}^{i}_{j}=\overset{p}{\theta}{}^{i}_{j}-\frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}\overset{p}{\theta}{}^{k}_{k},\ \overset{p}{\Omega}{}^{0}_{j}=0.$$

Каждая из систем форм $\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\overset{p}{\Pi}_{n,n}$

$$D\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}}=\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{k}}_{\bar{j}}\wedge\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}}+\frac{1}{2}\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\overset{p}{\Omega}{}^{s}_{0}\wedge\overset{p}{\Omega}{}^{t}_{0},$$

где компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$ имеют строение

$$\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{i}_{0st}=\overset{p}{r}{}^{i}_{st},\ \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{0}_{0st}=-\frac{1}{n+1}\overset{p}{r}{}^{k}_{kst},\ \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{0}_{jst}=0,\ \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{i}_{jst}=\overset{p}{r}{}^{i}_{jst}-\frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}\overset{p}{r}{}^{k}_{kst}.$$

Показано, что $\overset{p}{\Omega}{}^{0}_{0}=-\frac{1}{c}\overset{p}{g}_{k0}\overset{p}{\Omega}{}^{k}_{0}$, где

$$\overset{1}{g}_{k0} = g_{k0} + c \cdot c_k^0, \quad \overset{2}{g}_{k0} = g_{k0} - c \cdot c_k^0 + \frac{c}{n+1} b_k,$$
$$\overset{3}{g}_{k0} = g_{k0} + c \cdot c_k^0, \quad \overset{4}{g}_{k0} = g_{k0} - c \cdot c_k^0 + \frac{c}{n+1} b_k. \qquad (2)$$

Каждое из выражений (2) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$d\overset{p}{g}_{k0} - \overset{p}{g}_{s0} \overset{p}{\Omega}{}_k^s - c \overset{p}{\Omega}{}_k^0 (\equiv 0) = \overset{p}{a}_{ks} \overset{p}{\Omega}{}_0^s,$$

где, например, тензор $\overset{1}{a}_{ks}$ имеет вид $\overset{1}{a}_{ks} = a_{ks} + 2c \cdot c_k^0 c_s^0 + c \cdot a_{ks}^0$.

Допустим, что при некоторой невырожденной гармонической нормализации пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ все четыре пространства аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют нулевое кручение; заметим, что в соответствии с теоремой 5 для последнего достаточно, чтобы любые три из них (например, $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $\overset{4}{\mathrm{A}}_{n,n}$) имели нулевое кручение. Таким образом, согласно нашему допущению, справедливо

при $p = 1,4$:

$$\left(g_{t0} + c \cdot c_t^0\right)\left(a_{k[s}^0 \delta_{l]}^t + a_{s[k}^0 \delta_{l]}^t\right) = 0;$$

при $p = 2,3$: (3)

$$\left(g_{t0} + c \cdot c_t^0\right)\left[a_0^{ti}\left(a_{jk}^0 r_{isl}^j + a_{js}^0 r_{ikl}^j\right) + 2\left(a_{k[s}^0 \delta_{l]}^t + a_{s[k}^0 \delta_{l]}^t\right)\right] = 0.$$

Теорема 7. *Если каждое из двойственных пространств* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$*, индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$*, имеет нулевое кручение, то условие, при котором любое из них является пространством аффинно-метрической связности, выражается равенствами (3).*

Теорема 8. *Если каждое из двойственных пространств* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$, *имеет нулевое кручение, то любое из них есть пространство аффинно-метрической связности тогда и только тогда, когда нормализация пространства* $\mathrm{M}_{n,n}$ *является полярной; при этом пространства* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *вырождаются в одно пространство* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. 1943. Т. 41, №8. С. 329—331.

2. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. 2005. №4. С. 21—27.

3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

5. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

6. *Столяров А. В.* Пространство проективно-метрической связности // Известия вузов. Математика. 2003. №11. С. 70—76.

7. *Столяров А. В.* Аффинно-метрическая связность // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. 2006. №5. С. 158—167.

T. Alenina

Spaces of affine-metrical connection

The questions of dual geometry of the normalized space of affine connection $\mathrm{A}_{n,n}$ are studied in this work. In particular, we consider the dual spaces of affine-metrical connection $\overset{p}{\mathrm{M}}_{n,n}$ induced by nondegenerate normalization of the space of affine-metrical connection $\mathrm{M}_{n,n}$.