ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Феденко А.С.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП СЕРИИ A.

Однородное пространство G/H мы называем периодическим порядка k, если существует такой автоморфизм Φ группы Ли G, что: 1/ $\Phi^k = id$, 2/ H содержится в подгруппе G^Φ всех Φ-неподвижных точек и содержит компоненту единицы группы G^Φ. В работе [I] дана локальная классификация периодических однородных пространств, основными группами которых являются классические компактные группы, а также некоторые некомпактные классические группы. В настоящей статье завершается локальная классификация периодических однородных пространств с классическими основными группами серии A. Как и в [I], мы будем пользоваться следующей теоремой:

Конечная группа автоморфизмов связной группы Ли оставляет инвариантной некоторую максимальную компактную подгруппу.

Группа $SU(p,q)$.

Эта группа состоит из комплексных матриц порядка $p+q$ с единичным определителем, оставляющих инвариантной эрмитову форму

$$-z^1\bar{z}^1 - \dots - z^p\bar{z}^p + z^{p+1}\bar{z}^{p+1} + \dots \mp z^{p+q}\bar{z}^{p+q}.$$

Алгебра Ли $su(p,q)$ группы $SU(p,q)$ состоит из матриц

$$B = \begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ \bar{M}_3^t & M_2 \end{bmatrix},$$

где M_1, M_2 – косоэрмитовы матрицы порядков p и q, M_3 – произвольная $p\times q$ матрица, $\operatorname{tr} M_1 + \operatorname{tr} M_2 = 0$. Максимальная компактная подгруппа K группы $SU(p,q)$ состоит из матриц (L_1, L_2), где L_1 и L_2 есть унитарные матрицы порядков p и q.

В силу указанной выше теоремы, достаточно рассмотреть лишь те автоморфизмы группы $SU(p,q)$, которые являются продолжениями автоморфизмов группы K. В свою очередь, автоморфизмы группы K описываются с помощью результатов работы [I].

Рассмотрим автоморфизм

$$\Phi : A \longmapsto TAT^{-1} \tag{1}$$

группы K, порождаемой матрицей

$$T = (\varepsilon_1 E_{n_1}, \dots, \varepsilon_s E_{n_s}, \varepsilon_{s+1} E_{n_{s+1}}, \dots, \varepsilon_r E_{n_r}),$$

где E_{n_i} – единичная матрица порядка n_i и $|\varepsilon_i| = 1$. Этот автоморфизм распространяется на группу $SU(p,q)$, причем группа $SU(p,q)^\Phi$ изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\ldots\times U(p_\ell,q_\ell)).$$

Исследуем автоморфизм

$$\Phi:\ A\longmapsto T\bar{A}T^{-1} \tag{2}$$

группы K, порождаемой матрицей

$$T=(P_1,\ldots,P_r,E_{n_1},Q_1,P_{r+1},\ldots,P_s,E_{n_2},Q_2). \tag{3}$$

где

$$Q_1=\begin{bmatrix}0 & E_{k_1}\\ -E_{k_1} & 0\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}0 & -E_{k_2}\\ E_{k_2} & 0\end{bmatrix},\quad P_i=\begin{bmatrix}0 & E_{m_i}\\ \varepsilon_i E_{m_i} & 0\end{bmatrix}.$$

$|\varepsilon_i|=1$, среди $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$ нет комплексно сопряженных, также как и среди $\varepsilon_{r+1},\ldots,\varepsilon_s$. Этот автоморфизм распространяется на всю группу $SU(p,q)$. Найдем подгруппу $SU(p,q)^{\Phi}$ и соответствующую ей подалгебру $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{su}(p,q)$. Матрицы B алгебры $\mathfrak{h}$ являются решениями уравнения

$$BT=T\bar{B}. \tag{4}$$

Разобьем матрицу B на клетки в соответствии с разложением (3) матрицы T: $B=(B_{ij})$. Тогда из уравнения (4) получим, что $B_{r+1,r+1}$ и $B_{s+3,s+3}$ -вещественные кососимметрические матрицы, $B_{r+1,s+3}$ -произвольная вещественная матрица и $B_{s+3,r+1}=B^t_{r+1,s+3}$. Как известно [2], матрицы

$$\begin{bmatrix}B_{r+1,r+1} & B_{r+1,s+3}\\ B_{s+3,r+1} & B_{s+3,s+3}\end{bmatrix}.$$

образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(p_1,q_1)$. Рассмотрим матрицы

$$T=\begin{bmatrix}0 & E_{k_1} & 0 & 0\\ -E_{k_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -E_{k_2}\\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}B_{r+2,r+2} & B_{r+2,s+4}\\ B_{s+4,r+2} & B_{s+4,s+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34}\\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44}\end{bmatrix} \tag{5}$$

Из уравнения (4) следует, что матрица (5) подобна матрице

$$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{13} & M_{12} & M_{14}\\ \bar{M}^t_{13} & M_{33} & M^t_{14} & M_{34}\\ -\bar{M}_{12} & \bar{M}_{14} & \bar{M}_{11} & -\bar{M}_{13}\\ \bar{M}^t_{14} & -\bar{M}_{34} & -\bar{M}^t_{13} & \bar{M}_{33}\end{bmatrix} \tag{6}$$

где матрицы M_{11} и M_{33} косоэрмитовы, M_{12} и M_{34}-симметрические M_{13} и M_{14} -произвольные. Как известно [2], матрицы (6) образуют алгебру Ли $\mathfrak{sp}(p_2,q_2)$.

Если одно из чисел $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$ равно какому-либо из чисел $\varepsilon_{\tau+1},\dots,\varepsilon_s$, например, $\varepsilon_1=\varepsilon_{\tau+1}$, то

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{1,\tau+3} \\ B_{\tau+3,1} & B_{\tau+3,\tau+3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & L_{13} & 0 \\ 0 & \bar{L}_{11} & 0 & \bar{L}_{13} \\ \bar{L}_{13}^{t} & 0 & L_{33} & 0 \\ 0 & L_{13} & 0 & \bar{L}_{33}\end{bmatrix} \qquad (7)$$

где L_{11}, L_{33} -косоэрмитовы матрицы, а L_{13} -произвольная комплексная матрица. Известно [2], что алгебра Ли матриц (7) изоморфна $\mathfrak{u}(p_3,q_3)$. Предположим теперь, что среди $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\tau$ есть число, комплексно сопряженное с каким-либо из чисел $\varepsilon_{\tau+1},\dots,\varepsilon_s$, например, $\varepsilon_s=\bar{\varepsilon}_\tau$. Тогда

$$\begin{bmatrix} B_{\tau\tau} & B_{\tau s} \\ B_{s\tau} & B_{ss}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & \bar{N}_1 & \varepsilon_\tau \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_\tau N_2^{t} & N_3 & 0 \\ \bar{N}_2^{t} & 0 & 0 & \bar{N}_3\end{bmatrix} \qquad (8)$$

где N_1, N_3 -косоэрмитовы матрицы, а N_2 -произвольная комплексная матрица. Алгебра Ли матриц (8) изоморфна $\mathfrak{u}(p_4,q_4)$ Если для какого-либо из чисел $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\tau$, например, ε_1, среди чисел $\varepsilon_{\tau+1},\dots,\varepsilon_s$ нет равных ε_1 или комплексно сопряженных с ним, то

$$B_{11}=(S_1,\bar{S}_2), \qquad (9)$$

где S_1 -косоэрмитова матрица. Алгебра Ли матриц (9) изоморфна алгебре $\mathfrak{u}(p_5)$. Наконец, легко показать, что все матрицы B_{ij}, отличные от рассмотренных выше, являются нулевыми. Таким образом, подгруппа $SU(p,q)^{\Phi}$, соответствующая автоморфизму (2), изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\dots\times U(p_\ell,q_\ell)\times O(p_{\ell+1},q_{\ell+1})\times S_p(p_{\ell+2},q_{\ell+2}))$$

Если $p=q$, то возможен автоморфизм (I), порождаемый матрицей

$$T=\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0\end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит в этом случае из матриц

$$\begin{bmatrix} M & L \\ L & M\end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а L -эрмитова матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$. При $p=q$ можно рассмотреть также автоморфизм (2), порожденный матрицей (IO). Подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ \bar{M}_2 & \bar{M}_1\end{bmatrix}$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная симметрическая матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь произведение автоморфизма (2) с матрицей (IO) и автоморфизма (I) с матрицей

$$T = (\varepsilon_1 E_p, \varepsilon_2 E_p), \ \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2,$$

оставляющего подгруппу K точечно неподвижной. Возможны два различных случая. Если $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \neq \overline{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$B = (M, \bar{M}),$$

где M -косоэрмитова матрица и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{su}(p)$. Во втором случае алгебра $\mathfrak{h}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\bar{M}_2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная кососимметрическая матрица, и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}^*(2p)$.

Группа $SU^*(2n)$.

$SU^*(2n)$ есть группа матриц из $SL(2n, \mathbb{C})$, которые перестановочны с преобразованием

$$(z^1, \ldots, z^n, z^{n+1}, \ldots, z^{2n}) \mapsto (\bar{z}^{n+1}, \ldots, \bar{z}^{2n}, -\bar{z}^1, \ldots, -\bar{z}^n)$$

пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Алгебра Ли $\mathfrak{su}^*(2n)$ группы $SU^*(2n)$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2 & L_1 \end{bmatrix},$$

где L_1, L_2 -комплексные матрицы порядка n, $t + L_1 + t + L_2 = 0$. Максимальная компактная подгруппа K группы $SU^*(2n)$ есть группа $Sp(n)$, её алгебра Ли $\mathfrak{k}$ состоит из матриц

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\bar{M}_2 & \bar{M}_1 \end{bmatrix},$$

где M_1 -косоэрмитова матрица, а M_2 -комплексная кососимметрическая матрица.

Известно [3], что любой автоморфизм группы $Sp(n)$ с точностью до сопряженности в группе внутренних автоморфизмов, имеет вид (I), где

$$T = (e^{i\alpha_1} E_{n_1}, \ldots, e^{i\alpha_r} E_{n_r}, e^{-i\alpha_1} E_{n_1}, \ldots, e^{-i\alpha_r} E_{n_r}) \quad (11)$$

$$e^{i\alpha_p} \neq e^{i\alpha_q}, \text{ если } p \neq q, \ e^{i\alpha_{r-1}} = -1, \ e^{i\alpha_r} = 1.$$

Этот автоморфизм распространяется на всю группу $SU^*(2n)$ причем подгруппа $SU^*(2n)^\Phi$ изоморфна группе

$$S(GL(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times GL(n_{\tau-2},\mathbb{C})\times U^*(2n_{\tau-1})\times U^*(2n_\tau)).$$

Автоморфизм группы $SU^*(2n)$, оставляющий точечно неподвижной подгруппу K, имеет вид

$$\Phi:\ A\longmapsto(\bar{A}^{-1})^t. \qquad (12)$$

Соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{su}^*(2n)$ задается формулой

$$\varphi:\ B\longmapsto-\bar{B}^t.$$

Рассмотрим произведение автоморфизма (I) с матрицей (II) на автоморфизм (I2). Подалгебра $\mathfrak{h}$, соответствующая подгруппе неподвижных точек, состоит из матриц B, удовлетворяющих условию

$$BT=-TB^t,$$

где T есть матрица (II). Разбивая матрицу B на клетки, соответствующие разложению матрицы (II), получаем, что отличны от нулевых лишь те клетки, которые перечислены ниже. Матрица

$$\begin{bmatrix} B_{\tau-1,\tau-1} & B_{\tau-1,\tau} & B_{\tau-1,2\tau-1} & B_{\tau-1,2\tau} \\ B_{\tau,\tau-1} & B_{\tau,\tau} & B_{\tau,2\tau-1} & B_{\tau,2\tau} \\ B_{2\tau-1,\tau-1} & B_{2\tau-1,\tau} & B_{2\tau-1,2\tau-1} & B_{2\tau-1,2\tau} \\ B_{2\tau,\tau-1} & B_{2\tau,\tau} & B_{2\tau,2\tau-1} & B_{2\tau,2\tau} \end{bmatrix}$$

имеет вид (6) и поэтому соответствующая подалгебра есть $\mathfrak{sp}(p,q)$. Матрица

$$\begin{matrix} B_{11} & B_{1,\tau+1} \\ B_{\tau+1,1} & B_{\tau+1,\tau+1} \end{matrix}$$

имеет вид

$$\begin{matrix} B_{11} & B_{1,\tau+1} \\ -\bar{B}_{1,\tau+1} & \bar{B}_{11} \end{matrix}$$

где B_{11} – косоэрмитова матрица, а $B_{1,\tau+1}$ – комплексная кососимметрическая матрица или $B_{1,\tau+1}=0$. Таким образом, в рассматриваемом случае подгруппа $SU^*(2n)^\Phi$ изоморфна группе

$$S(U(n_1)\times\cdots\times U(n_{\tau-2})\times O^*(2n_{\tau-1})\times Sp(p,q)).$$

Группа $SL(n,\mathbb{C})$.

$SL(n,\mathbb{C})$ есть группа всех комплексных матриц порядка n с единичным определителем, её алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ состоит из всех комплексных матриц порядка n с нулевым следом. Максимальная компактная подгруппа K группы $SL(n,\mathbb{C})$ есть группа $SU(n)$. Известно [4], что любой непрерывный автоморфизм группы $SL(n,\mathbb{C})$ может быть представлен в виде (I) или

$$\Phi:\ A\longmapsto T(A^{-1})^t\,T^{-1}, \qquad (13)$$

где

$$T\in SL(n,\mathbb{C}).$$

Рассмотрим сначала автоморфизм (I). Как и в случае группы $SL(n,\mathbb{R})$ показывается (см.[I]), что в качестве T надо брать жорданову матрицу, удовлетворяющую условию

$$T^k = E,$$

т.е. матрицу

$$T = (\varepsilon_1 E_1, \dots, \varepsilon_r E_{n_r}), \tag{14}$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ -различные корни k -ой степени из I. Подгруппа $SL(n,\mathbb{C})^\Phi$ имеет в данном случае вид

$$S(GL(n_1,\mathbb{C}) \times \dots \times GL(n_r,\mathbb{C})).$$

Перейдем к автоморфизму (I3). Как и в случае группы $SL(n,\mathbb{R})$ показывается (см.[I]), что матрица T может выбираться с точностью до замены

$$T \longrightarrow STS^t,$$

где $S \in SL(n,\mathbb{C})$. В соответствии с теоремой, указанной в начале статьи, будем искать автоморфизмы (I3) группы $SL(n,\mathbb{C})$, оставляющие инвариантной максимальную компактную подгруппу $K = SU(n)$. Пусть матрица A унитарна, т.е. $\bar{A}^t = A^{-1}$. Поэтому

Потребуем, чтобы матрица $T(A^{-1})^t T^{-1}$ также была унитарной:

$$A^t(\bar{T}^t T) = (\bar{T}^t T)A^t.$$

Итак, матрица $\bar{T}^t T$ перестановочна со всякой унитарной матрицей. Отсюда следует, что

$$\bar{T}^t T = \alpha E, \tag{15}$$

где $\alpha^n = 1$. Так как матрица $\bar{T}^t T$ имеет вещественные неотрицательные диагональные элементы, то (I5) приводится к виду

$$\bar{T}^t T = E,$$

т.е. матрица T унитарна.

Таким образом, для классификации периодических автоморфизмов (I3) группы $SL(n,\mathbb{C})$ достаточно ограничиться унитарными матрицами T. Далее, как и в случае группы $SU(n)$ (см.[I]) показывается, что матрицу T можно привести к виду

$$T = (P_1, \dots, P_r, Q_1, Q_2), \tag{16}$$

где

$$Q_1 = E, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & E_{ki} \\ \varepsilon_i E_{ki} & 0 \end{bmatrix},$$

$\varepsilon_i^{p_i} = 1, \varepsilon_i \neq \pm 1$, среди $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ нет комплексно сопряженных.

Пусть $\mathfrak{h}$ -подалгебра в алгебре $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, соответствующая подгруппе $SL(n,\mathbb{C})^\Phi$ для автоморфизма (I3). Матрица $B \in \mathfrak{h}$ удовлетворяет уравнению

$$BT = -TB^t. \tag{17}$$

где T есть матрица (I6). Представляя матрицу B в клеточном виде, получаем из (I7):

$$B_{ii} P_i = -P_i B_{ii}^t , \quad 1 \le i \le \tau \tag{18}$$

Полагая

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} L & M \\ N & Q \end{bmatrix},$$

получаем из уравнения (I7)

$$M^t = \varepsilon_i M , \quad Q = L^t , \quad N = \varepsilon_i N^t .$$

Отсюда $M^t = \varepsilon_i^2 M^t$, $N = \varepsilon_i^2 N$. Так как $\varepsilon_i^2 \ne 1$,то $M = 0$, $N = 0$.Итак,

$$B_{ii} = (L , L^t) \tag{19}$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$B_{ij} P_j = -P_i B_{ji}^t , \quad B_{ji} P_i = -P_j B_{ij}^t ,$$

$$1 \le i, j \le \tau , \quad i \ne j .$$

Полагая

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}, \quad B_{ji} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

получаем из (I7)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_j L_2 & L_1 \\ \varepsilon_j L_4 & L_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_2^t & M_4^t \\ \varepsilon_i M_1^t & \varepsilon_i M_3^t \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_i M_2 & M_1 \\ \varepsilon_i M_4 & M_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_2^t & L_4^t \\ \varepsilon_j L_1^t & \varepsilon_j L_3^t \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Из (20) и (2I) получаем

$$\varepsilon_j L_2 = M_2^t , \quad \varepsilon_i M_2 = L_2^t \Rightarrow L_2 = \varepsilon_i M_2^t = \bar{\varepsilon}_j M_2^t .$$

Так как $\varepsilon_i \ne \bar{\varepsilon}_j$,то $L_2 = M_2 = 0$.Аналогично получим

$$L_1 = 0, \ L_3 = 0, \ L_4 = 0, \ M_1 = 0, \ M_3 = 0, \ M_4 = 0.$$

Итак,

$$B_{ij} = 0 , \quad 1 \le i, j \le \tau , \quad i \ne j .$$

Аналогично можно получить равенства

$$B_{i,\tau+1} = 0, \quad B_{\tau+1,i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,\tau,\tau+2 ,$$

$$B_{j,\tau+2} = 0, \quad B_{\tau+2,j} = 0, \quad j = 1,2,\dots,\tau,\tau+1 .$$

Уравнение

$$B_{\tau+1,\tau+1} Q_1 = - Q_1 B_{\tau+1,\tau+1}^t \quad (Q_1 = E)$$

говорит о том,что матрицы $B_{\tau+1,\tau+1}$ образуют алгебру Ли $\lozenge(p, \mathbb{C})$. Из уравнения

$$B_{\tau+2,\tau+2} Q_2 = - Q_2 B_{\tau+2,\tau+2}^t$$

вытекает,что матрица $B_{\tau+2,\tau+2}$ имеет вид

$$B_{\tau+2,\tau+2} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_1^t \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

где N_2, N_3 -комплексные симметрические матрицы, а N_1 - произвольная комплексная матрица. Известно [2], что матрицы (22) образуют алгебру Ли $\mathfrak{sp}(m,\mathbb{C})$. Таким образом, подгруппа $SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$, соответствующая автоморфизму Э (I3), имеет вид:

$$S(\widetilde{GL}(n_1)\times\dots\times\widetilde{GL}(n_{\tau-2})\times O(n_{\tau-1},\mathbb{C})\times Sp(n_\tau,\mathbb{C}).$$

где группа $\widetilde{GL}(n_i)$ изоморфна группе $GL(n_i,\mathbb{C})$ и состоит из матриц вида (I9).

Рассмотрим сопряжение алгебры $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ относительно подалгебры $\mathfrak{su}(n)$:

$$B \longrightarrow -\bar{B}^t. \qquad (23)$$

Это отображение не является автоморфизмом комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, но является автоморфизмом вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. В этом случае подалгебра неподвижных элементов имеет вид $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(n)$.

Рассмотрим автоморфизм вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, являющийся произведением дифференциала автоморфизма (I) и сопряжения (23):

$$\varphi:\ B \longrightarrow -T\bar{B}^tT^{-1}, \qquad (24)$$

где T есть матрица (I4). Найдем матрицы B подалгебры

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^{\varphi}$ из уравнения $BT = -TB^t$. (25)

Представляя матрицу B в клеточном виде, получаем из (25):

$$B_{ii} = -\bar{B}_{ii}^t, \quad 1 \le i \le \tau, \qquad (26)$$

$$\varepsilon_j B_{ij} = -\varepsilon_i \bar{B}_{ji}^t, \quad \varepsilon_i B_{ji} = -\varepsilon_j \bar{B}_{ij}^t, \qquad (27)$$

$$1 \le i, j \le \tau, \quad i \ne j.$$

Из уравнений (27) следует

$$B_{ij} = -\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\bar{B}_{ji}^t = -\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right)}\bar{B}_{ji}^t \qquad (28)$$

Возможны следующие случаи:

I/ $\varepsilon_j \ne -\varepsilon_i$. Тогда из (28) следует

$$B_{ij} = 0.$$

2/ $\varepsilon_j = -\varepsilon_i$. Тогда из (28) получаем

$$B_{ji} = \bar{B}_{ij}^t.$$

Итак, в случае 2/ мы приходим к матрице

$$\begin{bmatrix} B_{ii} & B_{ij} \\ \bar{B}_{ij}^t & B_{jj} \end{bmatrix}, \qquad (29)$$

где B_{ii}, B_{jj} -косоэрмитовы матрицы, а B_{ij} -произвольная комплексная матрица. Известно [2], что матрицы (29) образуют алгебру Ли $\mathfrak{u}(p,q)$. Таким образом, подгруппа

$SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$,соответствующая автоморфизму (24) алгебры $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$,изоморфна группе

$$S(U(p_1,q_1)\times\cdots\times U(p_s,q_s)).$$

Рассмотрим автоморфизм вещественной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, являющийся произведением дифференциала автоморфизма (I3) и сопряжения (23):

$$B\longrightarrow T\bar{B}T^{-1},$$

где T есть матрица (I6).Матрицы B подалгебры $\mathfrak{h}$ находятся из уравнений

$$BT=T\bar{B}.$$

Группа $SL(n,\mathbb{C})^{\Phi}$ имеет вид

$$S(\underline{GL}(n_1)\times\cdots\times\underline{GL}(n_p)\times GL(m,\mathbb{R})\times U^{*}(2m_2)),$$

где $\underline{GL}(n_i)$ есть группа,состоящая из матриц

$$V(n_i)=(W(n_i),\bar{W}(n_i),\quad W(n_i)\in GL(n_i,\mathbb{C})$$

и изоморфная группе $GL(n_i,\mathbb{C})$.

Л и т е р а т у р а.

I.Феденко А.С.,Пространства,определяемые эндоморфизмами групп Ли (Φ -пространства).Тр.геом.семинара.Ин-тнауч.инф. АН СССР,I973,4,23I-267.

2.Хелгасон С.,Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.М.,Мир,I964.

3.Картан Э.,Геометрия групп Ли и симметрические пространства.М.,ИЛ,I949.

4.Дьёдонне Ж.,Геометрия классических групп.М.,Мир,I974.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 I974

Ф у н т и к о в а Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(P\mathcal{L})_{2,1}$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$ пар фигур $\{P,\mathcal{L}\}$,где P - точка, $\mathcal{L}$ -прямая [I].Каждой точке P поверхности (P) соответствует единственная прямая $\mathcal{L}$ линейчатой поверхности $(\mathcal{L})$,полным прообразом которой является линия $\Gamma_{\mathcal{L}}$ на поверхности (P).Из рассмотрения исключаются конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$ с цилиндрической поверхностью $(\mathcal{L})$,а также случаи,когда прямая $\mathcal{L}$ инцидентна касательной плоскости к поверхности (P) в точке P и когда точка пересечения прямой $\mathcal{L}$ с касательной плоскостью к поверхности (P) в точке P принадлежит касательной к линии $\Gamma_{\mathcal{L}}$ в точке P .

Указаны ряд свойств конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$.Подробно исследованы конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$, у которых линии $\Gamma_{\mathcal{L}}$ являются асимптотическими линиями на поверхности (P).

§I.Геометрическая характеристика конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$.

I.Канонический репер конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$.

Присоединим к каждой паре фигур $\{P,\mathcal{L}\}$ конгруэнции $(P\mathcal{L})_{2,1}$