ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Г.П. Т к а ч

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АФФИННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛОЙ И ПРЯМОЙ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются невырожденные двухпараметрические семейства (конгруэнции) пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -парабола; $F_2 \equiv \ell$ - прямая, не параллельная плоскости параболы F_1 и не пересекающая F_1. Построен канонический репер, исследованы аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$ и их подклассы.

§I. Канонический репер пары $\mathcal{L}$

Отнесем пару $\mathcal{L}$ к каноническому реперу $R=\{A, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3\}$. Парой $\mathcal{L}$ назовем невырожденную конгруэнцию пар фигур $\{F_1, \ell\}$ [I]. Пусть M_0 - точка пересечения прямой ℓ с плоскостью параболы. Вершина A канонического репера помещена в точку пересечения с параболой F_1 ее диаметра, проходящего через M_0, конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой M_0, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной ℓ' к параболе в точке A, вектор $\bar{e}_3$ -параллелен прямой ℓ. Векторы $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$

пронормированы так, что точки

$$\bar{A}^*_1 = \bar{A} + 2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \quad \bar{A}^*_{-1} = \bar{A} + 2(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$$

инцидентны параболе F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \qquad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3) \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{1.2}$$

Из условия эквиаффинности

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1$$

имеем

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения параболы F_1 и прямой ℓ в каноническом репере примут соответственно вид:

$$(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{1.4}$$

$$x^1 = 1, \quad x^2 = 0. \tag{1.5}$$

Принимая формы Пфаффа ω_2^1, ω_3^1 за независимые первичные формы пары $\mathcal{L}$ (при этом исключаем случай, когда в расширенном аффинном пространстве число параметров, от которых зависят несобственные прямые плоскостей $x^1=0$, меньше двух), запишем систему дифференциальных уравнений, определяющих пару $\mathcal{L}$:

$$\omega^i = \Gamma^{i1}\omega^1_2 + \Gamma^{i2}\omega^1_3, \quad \omega^3 = \Gamma^{31}\omega^1_2 + \Gamma^{32}\omega^1_3,$$

$$\omega^2_1 = \Gamma^{21}_1\omega^1_2 + \Gamma^{22}_1\omega^1_3, \quad \omega^2_3 = \Gamma^{21}_3\omega^1_2 + \Gamma^{22}_3\omega^1_3, \qquad (1.6)$$

$$\omega^i_i = \Gamma^{i1}_i\omega^1_2 + \Gamma^{i2}_i\omega^1_3, \quad \omega^3_i = \Gamma^{31}_i\omega^1_2 + \Gamma^{32}_i\omega^1_3; \; i,j,\kappa = 1,2.$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i, j суммирование не производится.

Анализируя систему уравнений (I.6) находим, что пара $\mathcal{L}$ существует и определяется с произволом девяти функций двух аргументов.

§ 2. Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$

Обозначим буквой Π_α координатную плоскость $x^\alpha = 0$.

Определение I. Пара $\mathcal{L}$ называется аффинно расслояемой [2], если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции (F_1) парабол F_1 к конгруэнции (Π_1) плоскостей Π_1.

Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнции (F_1) к конгруэнции (Π_1) имеют вид:

$$\begin{aligned} &(2\omega^2_2 - \omega^1_1)\wedge\omega^1_2 + 2\,\omega^3_2\wedge\omega^1_3 = 0, \\ &\omega^2_1\wedge\omega^1_2 + \omega^3_1\wedge\omega^1_3 = 0, \\ &\omega^2\wedge\omega^1_2 + \omega^3\wedge\omega^1_3 = 0, \\ &\omega^1\wedge\omega^1_2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Система Пфаффа аффинно расслояемой пары $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\omega^1 = a^*\omega^1_2, \quad \omega^2 = a^*_1\omega^1_2 + a\,\omega^1_3, \quad \omega^3 = a\,\omega^1_2 + a^*_2\omega^1_3,$$

$$\omega^1_1 = \Gamma^{11}_1\omega^1_2 + \Gamma^{12}_1\omega^1_3, \quad \omega^2_1 = \Gamma^{21}_1\omega^1_2 + b\,\omega^1_3, \quad \omega^3_1 = b\,\omega^1_2 + \Gamma^{32}_1\omega^1_3, \qquad (2.2)$$

$$2\omega^2_2 - \omega^1_1 = m\,\omega^1_2 + n\,\omega^1_3, \quad \omega^3_2 = \frac{1}{2}n\,\omega^1_2 + \Gamma^{32}_2\omega^1_3, \quad \omega^2_3 = \Gamma^{21}_3\omega^1_2 + \Gamma^{22}_3\omega^1_3.$$

Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Теорема I. Если существуют односторонние аффинные расслоения [2] от конгруэнции (F_1) и от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_i)$ к конгруэнции (Π_i) плоскостей Π_i пары $\mathcal{L}$, причем огибающая поверхность (M_i) плоскостей $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_3)$ не является торсом, то точка M_i плоскости Π_i лежит на прямой $\bar{A} + \lambda\bar{e}_j$.

Доказательство. Из условий односторонних аффинных расслоений от конгруэнции (F_1) и от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_i)$ к конгруэнции (Π_i) вытекает, что

$$\omega^i_j = \alpha^*_i\,\omega^i. \qquad (2.3)$$

Учитывая (2.3), приводим систему для определения координат характеристической точки M_i к виду:

$$x^i = 0, \quad \alpha^*_i x^j + 1 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Для аффинно расслояемых пар $\mathcal{L}$ имеет место одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AM) к конгруэнции (Π_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (AM_o) к конгруэнции (Π_1) имеют вид:

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0. \qquad (2.4)$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из того, что система уравнений (2.4) является следствием системы уравнений (2.I), определяющих аффинно расслояемую пару $\mathcal{L}$.

О п р е д е л е н и е 2. Аффинно расслояемые пары $\mathcal{L}$, у которых поверхность (A) является огибающей семейства плоскостей Π_1, называется парой $\mathcal{L}_o$.

Для пар $\mathcal{L}_o$ имеет место конечное соотношение

$$a^* = 0. \qquad (2.5)$$

Из системы (2.2), учитывая (2.5), получаем

$$\omega^1 = 0. \qquad (26)$$

Замыкание

$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0$$

уравнения (2.6) входит в систему уравнений (2.I). Произвол существования пар $\mathcal{L}_o$ -четыре функции двух аргументов.

§3. Основные геометрические образы, ассоциированные с парй $\mathcal{L}_o$

I. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_1)$.

Фокусы

$$\bar{F}_1 = \bar{A} + \lambda \bar{e}_1$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_1)$ и ее торсы определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_1^2(\Gamma_{1.}^{21}\Gamma_1^{32} + b^2) + \lambda_1(a_1^*\Gamma_1^{32} - 2ab + a_2^*\Gamma_1^{21}) + (a_1^* a_2^* - a^2) = 0, \qquad (3.1)$$

$$\omega^2\omega_1^3 - \omega^3\omega_1^2 = 0. \qquad (3.2)$$

2. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_2)$.

Фокусы

$$\bar{F}_2 = \bar{A} + \lambda_2 \bar{e}_2$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_2)$ и ее торсы определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_2(\lambda_2\Gamma_2^{32} + a_2^*) = 0, \qquad (3.3)$$

$$\omega^3\omega_2^1 = 0 \qquad (3.4)$$

3. Прямолинейная конгруэнция $(A, \bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \lambda_3 \bar{e}_3$$

луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_3)$ и её торсы определяют соответственно уравнениями:

$$\lambda_3(\lambda_3\Gamma_3^{21} + a_1^*) = 0, \qquad (3.5)$$

$$\omega^2\omega_3^1 = 0. \qquad (3.6)$$

4. Огибающая поверхность (M_2) плоскостей Π_2.

Если поверхность (M_2) не является торсом, то

$$\bar{M}_2 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_2}\left[(a_1^* \Gamma_3^{22} - a\Gamma_3^{21})\bar{e}_1 + (\Gamma_1^{21} a + b a_1^*)\bar{e}_3\right], \tag{3.7}$$

где

$$\Delta_2 = \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22} - b\Gamma_3^{21} \neq 0. \tag{3.8}$$

5. Огибающая поверхность (M_3) плоскостей Π_3.

Если поверхность (M_3) не является торсом, то

$$\bar{M}_3 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_3}\left[(a\Gamma_2^{32} - \frac{1}{2} a_2^* n)\bar{e}_1 - (a_2^* b - a\Gamma_1^{32})\bar{e}_2\right], \tag{3.9}$$

где

$$\Delta_3 = b\Gamma_2^{32} - \frac{1}{2}\Gamma_1^{32} n \neq 0. \tag{3.10}$$

6. Асимптотические линии поверхности (A).

Уравнение асимптотических линий поверхности (A) имеет вид:

$$(d^2 A, \bar{E}_1, \bar{E}_2) = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\bar{E}_1 = a_1^* \bar{e}_2 + a\bar{e}_3, \qquad \bar{E}_2 = a\bar{e}_2 + a_2^* \bar{e}_3 -$$

-векторы, коллинеарные касательной плоскости поверхности (A). Если

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0,$$

то уравнение (3.11) с учетом (2.2) примет вид:

$$a_1^* (\omega_2^1)^2 + 2a\,\omega_2^1 \omega_3^1 + a_2^* (\omega_3^1)^2 = 0. \tag{3.12}$$

§4. Пары $\mathcal{L}^*$

Определение 3. Пара $\mathcal{L}_0$, для которой координатная сеть линий является асимптотической сетью, а прямая AM_0 -аффинной нормалью поверхности (A), называется парой $\mathcal{L}^*$.

Теорема 3. Пары $\mathcal{L}^*$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Так как для пар $\mathcal{L}^*$ координатная сеть является асимптотической сетью поверхности (A), то из (3.12) имеем:

$$a_i^* = 0. \tag{4.1}$$

Учитывая второе условие определения 3, имеем:

$$\Gamma_3^{22} = n = 0. \tag{4.2}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega^2 = a\omega_3^1, \qquad \omega^3 = a\omega_2^1,$$

находим

$$\frac{1}{2}\, d\ln a = \omega_1^1, \tag{4.3}$$

замыкание которого дает тождественный нуль.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера пары $\mathcal{L}^*$ имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a\omega_3^1 & a\omega_2^1 \\ \Gamma_1^{11}\omega_2^1 + \Gamma_1^{12}\omega_3^1 & \Gamma_1^{21}\omega_2^1 + b\omega_3^1 & b\omega_2^1 + \Gamma_1^{32}\omega_3^1 \\ \omega_2^1 & \frac{1}{2}(m\omega_2^1 + \omega_1^1) & \Gamma_2^{32}\omega_3^1 \\ \omega_3^1 & \Gamma_3^{21}\omega_2^1 & -(\omega_1^1 + \omega_2^2) \end{matrix} \right\| \tag{4.4}$$

Находим $S_1=6$, $q=8$, $S_2=2$, $Q=N=10$. Теорема доказана.

Некоторые геометрические образы, ассоциированные с парой $\mathfrak{X}^*$.

I. Каноническое представление поверхности (A).

Относительно репера $\{A, \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3\}$ радиус - вектор близкой к A точке поверхности (A) можно записать в виде:

$$\Delta\bar{A} = d\bar{A} + \frac{1}{2} d^2\bar{A} + \frac{1}{6} d^3\bar{A} + [4].$$

Обозначая локальные координаты вектора $\Delta\bar{A}$ через x^α, найдем каноническое представление поверхности (A):

$$x^1 = \frac{1}{a} x^2 x^3 - \frac{1}{3a^2}\left[\Gamma_2^{32}(x^2)^3 + \Gamma_3^{21}(x^3)^3\right] + [4]. \tag{4.5}$$

2. Пучок соприкасающихся квадрик Дарбу поверхности (A).

Направления Дарбу определяются векторами

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha = \varepsilon\sqrt[3]{\tau}\,\bar{e}_2 - \bar{e}_3,$$

а соответствующие им линии Дарбу имеют уравнения

$$\omega_3^1 + \varepsilon\sqrt[3]{\tau}\,\omega_2^1 = 0,$$

где

$$\varepsilon^3 = 1, \quad \tau = \frac{\Gamma_3^{21}}{\Gamma_2^{32}}.$$

Уравнение пучка соприкасающихся квадрик Дарбу имеет вид:

$$\sigma(x^1)^2 + 2(x^2x^3 - ax^1) = 0. \tag{4.6}$$

центр его находится в точке

$$\bar{O} = \bar{A} + \frac{a}{\sigma}\bar{e}_1, \tag{4.7}$$

где σ -произвольный параметр.

3. Квадрика Ли поверхности (A).

Из пучка соприкасающихся квадрик Дарбу при условии $\sigma = -b$ выделяется единственная квадрика Ли

$$b(x^1)^2 - 2(x^2x^3 - ax^1) = 0 \tag{4.8}$$

с центром в точке

$$\bar{O}^* = \bar{A} - \frac{a}{b}\bar{e}_1. \tag{4.9}$$

4. Конгруэнция аффинных нормалей поверхности (A).

Уравнение луча конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A) запишется в виде:

$$\bar{F}_1 = \bar{A} + \lambda_1\bar{e}_1.$$

Учитывая (4.4), уравнения (3.I) и (3.2) примут вид:

$$\lambda_1^2(b^2 - \Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32}) + 2\lambda_1 ab + a^2 = 0, \tag{4.10}$$

$$\Gamma_1^{21}(\omega_2^1)^2 - \Gamma_1^{32}(\omega_3^1)^2 = 0. \tag{4.11}$$

На поверхности (A) уравнение (4.II) определяет сеть аффинных линий кривизны.

Решая уравнение (4.IO), найдем его корни $R_i = (\lambda_1)_i$ — аффинные радиусы кривизны.

Полные и средние аффинные кривизны поверхности соответственно равны:

$$K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{b^2 - \Gamma_1^{21}\cdot\Gamma_1^{32}}{a^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{b}{a}.$$

Геометрические свойства пары $\mathcal{L}^*$.

Обозначим буквой $\Gamma_2\,(\Gamma_3)$ линию на поверхности (A) с касательным вектором $\bar{e}_2\ (\bar{e}_3)$, буквой $\gamma_2\,(\gamma_3)$ –линию на поверхности (A) с касательным вектором $\bar{e}_2-\bar{e}_3\ (\bar{e}_2+\bar{e}_3)$.

Т е о р е м а 4. Пары $\mathcal{L}^*$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/Точка $M_2\,(M_3)$ лежит на прямой, проходящей через центр квадрики Ли поверхности параллельно прямой $\ell\,(\ell')$. 2. На индикатрисе вектора $\bar{e}_2\ (\bar{e}_3)$ касательная к линии, соответствующей линии Γ_2, параллельна плоскости $\Pi_1\,(\Pi_2)$. 3. На индикатрисе вектора $\bar{e}_2\,(\bar{e}_3)$ касательная к линии, соответствующей линии Γ_3, параллельна плоскости $\Pi_3\,(\Pi_1)$. 4. На индикатрисе вектора $\bar{e}_2+\bar{e}_3\ (\bar{e}_2-\bar{e}_3)$ касательная к линии, соответствующей линии $\gamma_2\,(\gamma_3)$, параллельна плоскости Π_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (4.4) и (4.9), находим:

$$\bar{M}_2 = \bar{O}^* + \frac{a\Gamma_1^{21}}{b\,\Gamma_3^{21}}\,\bar{e}_3\,,$$

$$\bar{M}_3 = \bar{O}^* + \frac{a\Gamma_1^{32}}{b\,\Gamma_2^{32}}\,\bar{e}_2\,.$$

Справедливость свойств 2,3 и 4 непосредственно вытекает из следующих формул:

$$(d\bar{e}_3)_{\omega_2^1=0} = \omega_2^2\bar{e}_2 + \omega_2^3\bar{e}_3\,,$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega_2^1=0} = \omega_3^1\bar{e}_1 + \omega_3^3\bar{e}_3\,;$$

$$(d\bar{e}_2)_{\omega_3^1=0} = \omega_2^1\bar{e}_1 + \omega_2^2\bar{e}_2\,,$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega_3^1=0} = \omega_3^2\bar{e}_1 + \omega_3^3\bar{e}_2\,;$$

$$[d(\bar{e}_2+\bar{e}_3)]_{\omega_2^1+\omega_3^1=0} = (\omega_2^2+\omega_3^2)\bar{e}_2 + (\omega_2^3+\omega_3^3)\bar{e}_3\,.$$

$$[d(\bar{e}_2-\bar{e}_3)]_{\omega_2^1-\omega_3^1=0} = (\omega_2^2-\omega_3^2)\bar{e}_2 + (\omega_2^3-\omega_3^3)\bar{e}_3\,.$$

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Труды геометрического семинара", I969, №2, с.I8I-206, ВИНИТИ АН СССР

2. Т к а ч Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной геометрической конференции. Самарканд, I972, с.215.

$\frac{1}{2}$. Зак. 10481.