(M, g) векторное поле ξ , отличное от ковариантно постоянного, порождает бесконечную последовательность фундаментальных тензорных полей $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ соответственно первого, второго и т.д. порядков, причем ни один из членов этой последовательности не равен нулю тождественно.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, I98I. Т.I. 344с.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

3. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, I948. 3I8 с.

4. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, I98I. Т.2. 4I4 с.

5. Я н о К., Б о х н е р С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, I957. I52 с.

Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 44-0I-0I595.

УДК 5I4.75

К ГЕОМЕТРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ 2-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^4

М.А.Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E^4 рассматривается пара 2-поверхностей, между которыми установлено соответствие $f: M \to M'$ так, что касательные плоскости в соответствующих точках ортогональны.

I. Пусть $\mathcal{F}(M)$ - R - алгебра дифференцируемых на M функций, $T^r_s(M)$ - $\mathcal{F}$ - модуль дифференцируемых тензорных полей на M типа (r,s) , ∂ - дифференцирование в E^4 .

Формулы Гаусса-Вейнгартена [1] поверхности M запишутся в виде

$$\partial_x y = \nabla_x y + \alpha(x,y), \quad \partial_x \eta = -A_\eta x + \nabla^\perp_x \eta, \tag{I}$$

где

$$x, y \in T^1_0(M) = TM, \quad A_\eta \in T^1_1(M),$$

α - вторая фундаментальная форма, $\eta \in T^\perp M$, ∇ - связность Леви-Чивита, $\nabla^\perp$ - нормальная связность.

Имеют место уравнения Гаусса-Кодацци

$$\begin{cases} R(x,y)z = A_{\alpha(y,z)}x - A_{\alpha(x,z)}y, \\ (\mathcal{D}_x\alpha)(y,z) = (\mathcal{D}_y\alpha)(x,z), \\ R^\perp(x,y)\eta = \alpha(x, A_\eta y) - \alpha(y, A_\eta x), \\ (dA_\eta)(x,y) = A_{\nabla^\perp_x \eta} y - A_{\nabla^\perp_y \eta} x, \\ g(A_\eta x, y) = g^\perp(\alpha(x,y), \eta), \\ g^\perp(R^\perp(x,y)\eta, \varepsilon) = g([A_\eta, A_\varepsilon]x, y), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$x, y, z \in TM; \quad \eta, \varepsilon \in T^\perp M; \quad R \in T^1_3(M)$$

- кривизна связности ∇ , $R^\perp$ - кривизна нормальной связности,

$$(dA_\eta)(x,y) = \nabla_x A_\eta y - \nabla_y A_\eta x - A_\eta[x,y]$$

- внешний дифференциал A_η в связности ∇ ,

$$(\mathcal{D}_x\alpha)(y,z) = (\nabla^\perp_x \alpha)(y,z) - \alpha(\nabla_x y, z) - \alpha(y, \nabla_x z)$$

- ковариантная производная в связности $\nabla^\perp \oplus \nabla$.

2. Положим

$$\vec{pq} = \mathfrak{b}, \quad p \in M, \quad q = f(p) \in M'.$$

Тогда отображение $f: M \to M'$ запишется в виде $q = p + \mathfrak{b}$. Разложим каждый вектор $\mathfrak{b}$ на касательную и нормальную составляющие

$$\mathfrak{b} = a + \xi, \quad a \in TM, \quad \xi \in T^\perp M.$$

Перенесем касательный вектор $y_q \in T_q M'$ параллельно (в связности ∂) в точку $p = f^{-1}(q)$ и обозначим его через $\underline{y_p}$, имеем

$$\underline{dfx} = x + \partial_x \mathfrak{b}, \quad x \in TM.$$

В силу (I) получим

$$\begin{cases} \underline{dfx} = Fx + \omega x, \\ Fx = x - A_\xi x + \nabla_x a, \quad \omega x = \alpha(x,a) + \nabla^\perp_x \xi. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} (d^\perp\omega)(x,y) = \alpha(y, Fx) - \alpha(x, Fy), \\ R^\perp(x,y)\xi = (d^\perp\omega)(x,y) - \alpha(y, \nabla_x a) + \alpha(x, \nabla_y a), \\ (dF)(x,y) = A_{\omega x} y - A_{\omega y} x, \\ R(x,y)a = (dA_\xi)(x,y) + (dF)(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

где
$$(d^{\perp}\omega)(x,y) = \nabla^{\perp}_x \omega y - \nabla^{\perp}_y \omega x - \omega[x,y]$$
– внешний дифференциал ω в связности $\nabla^{\perp}$.

3. Предположим, что касательные плоскости к M, M' в соответствующих точках ортогональны, т.е.
$$F=0, \quad \operatorname{rang}\omega_p = 2, \quad \forall p \in M.$$
Тогда из (4) имеем
$$\begin{cases} \nabla_x a = A_\xi x - x, \quad (d^{\perp}\omega)(x,y) = 0, \quad A_{\omega x} y = A_{\omega y} x, \\ R^{\perp}(x,y)\xi = \alpha(x, \nabla_y a) - \alpha(y, \nabla_x a) = \\ \qquad = \alpha(x, A_\xi y) - \alpha(y, A_\xi x), \\ R(x,y)a = (dA_\xi)(x,y). \end{cases} \tag{5}$$
Метрика поверхности M' индуцирует на M метрику
$$\overset{\omega}{g}(x,y) = (\underline{dfx}, \underline{dfy}) = g^{\perp}(\omega x, \omega y)$$
и связность $\overset{\omega}{\nabla}_x y = \omega^{-1}\nabla^{\perp}_x \omega y$, которая является [2] связностью Леви-Чивита метрики $\overset{\omega}{g}$. Тензор кривизны $\overset{\omega}{R}$ связности $\overset{\omega}{\nabla}$ имеет вид
$$\overset{\omega}{R}(x,y)z = \omega^{-1}R^{\perp}(x,y)\,\omega z. \tag{6}$$
Определим гауссовы кривизны $K, K'=\overset{\omega}{K}$ поверхностей M, M'. Имеем
$$\begin{cases} K = \dfrac{g(R(a, \omega^{-1}(\xi))\omega^{-1}(\xi), a)}{g(a,a)\,g(\omega^{-1}(\xi), \omega^{-1}(\xi)) - g(a, \omega^{-1}(\xi))^2}, \\ \overset{\omega}{K} = \dfrac{\overset{\omega}{g}(\overset{\omega}{R}(a, \omega^{-1}(\xi))\,\omega^{-1}(\xi), a)}{\overset{\omega}{g}(a,a)\,\overset{\omega}{g}(\omega^{-1}(\xi), \omega^{-1}(\xi)) - \overset{\omega}{g}(a, \omega^{-1}(\xi))^2} \end{cases} \tag{7}$$
Т е о р е м а I. Если $\nabla_x a = 0$, то $K = \overset{\omega}{K} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $\nabla_x a = 0$ следует $R(x,y)a=0$. Из (5) имеем $R^{\perp}(x,y)\xi = 0$. Исследуем числители в (7). Имеем
$$\begin{cases} g(R(a, \omega^{-1}(\xi))\,\omega^{-1}(\xi), a) = -g(R(a, \omega^{-1}(\xi))a, \omega^{-1}(\xi)) = 0, \\ \overset{\omega}{g}(\overset{\omega}{R}(a, \omega^{-1}(\xi))\,\omega^{-1}(\xi), a) = g^{\perp}(R^{\perp}(a, \omega^{-1}(\xi))\xi, \omega(a)) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Следовательно, $K = \overset{\omega}{K} = 0$.

Т е о р е м а 2. Если $\nabla^{\perp}_x \xi = 0$, то $K = \overset{\omega}{K} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\nabla^{\perp}_x \xi = 0$. Тогда $R^{\perp}(x,y)\xi = 0$. Из (2), (5) имеем
$$(dA_\xi)(x,y) = 0, \quad R(x,y)a = 0,$$
т.е. выполняется (8).

Теоремы I, 2 не имеют обратного действия.

П р и м е р I. Пусть
$$\gamma:\ \rho = \rho(u) \subset E^3 \subset E^4$$
– неплоская кривая, c – постоянный вектор, ортогональный E^3. Полагаем, что M – цилиндр $r(u,v) = \rho(u) + vc$. Вдоль кривой γ нормальные плоскости кривой совпадают с нормальными плоскостями поверхности M и огибают поверхность
$$R(u,v) = \rho(u) + \frac{1}{k}\nu + v\beta,$$
где k – кривизна γ, ν, β — орты главной нормали и бинормали γ. Имеем
$$b = \frac{1}{k}\nu(u) + v\beta(u) - vc(u), \quad a = -vc, \quad \xi = \frac{1}{k}\nu + v\beta.$$
Так как
$$\partial_v c = -c \in TM, \quad \partial_v \xi = \beta \in T^{\perp}M,$$
то $\nabla_x a \neq 0$, $\nabla^{\perp}_x \xi \neq 0$.

Т е о р е м а 3. Если $\nabla_x a = 0$, $\nabla^{\perp}_x \xi = 0$, то поверхности M, M' расположены на гиперсферах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Центром гиперсфер является точка $Q = p + \xi = q - a$. Действительно, $\partial_x Q = \partial_x p + \partial_x \xi =$ $= x - A_\xi x + \nabla^{\perp}_x \xi = \nabla_x a + \nabla^{\perp}_x \xi = 0$.

П р и м е р 2. Торы Клиффорда
$$M:\ r = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v),$$
$$M':\ R = (-\sin u, \cos u, -\sin v, \cos v).$$
Векторы r_u, r_v, R_u, R_v – ортонормированный базис, $r_u, r_v \in TM$, $R_u, R_v \in T^{\perp}M$.
Вектор $b = \overline{pq}$ имеет вид $b = r_u + r_v + R_u + R_v$. Откуда $a = r_u + r_v$, $\xi = R_u + R_v$. А так как $\partial_u a = R_u \in T^{\perp}M$, $\partial_v \xi = -r_v \in TM$, то получим $\nabla_x a = 0$, $\nabla^{\perp}_x \xi = 0$.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 412 с.

2. Чешкова М.А. К геометрии диффеоморфных n-поверхностей в E_{2n} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.114-116.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТИ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И.Шевченко

(Калининградский государственный университет)

Введены понятия голономного и неголономного дифференцируемых многообразий, установлена связь между кручением линейной связности, голономностью и оснащением многообразия. Показано, что объекты кручения и кривизны линейной связности голономного многообразия, а также объекты кривизны геометрической связности в составном голономном многообразии и групповой связности в главном голономном расслоении являются тензорами.

1. Расслоения реперов. Структурные уравнения n-мерного дифференцируемого многообразия V имеют вид [1]:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J \quad (I, J, K, L, M = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где $\omega^I = x^I_J\, dx^J$, dx^J - дифференциалы некоторых локальных координат x^J точки $x \in V$, матрица коэффициентов x^I_J невырожденна: $\det(x^I_J) \neq 0$. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^I = 0$ фиксирует точку x:

$$\omega^I = 0 \Leftrightarrow dx^J = 0 \Leftrightarrow x^J = const. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и разрешая по обобщенной [1] лемме Картана, получим

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}, \tag{3}$$

причем

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0. \tag{4}$$

Условия (4) выполняются в голономном случае:

$$\omega^I_{[JK]} = 0, \tag{5}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам в них. Однако равенства (5) не являются необходимыми [1, с.142] для выполнения условий (4).

Над многообразием V возникает так называемое главное расслоение реперов $L(V)$ со структурными уравнениями (1), (3), типовым слоем которого является линейная группа $L = GL(n)$, $\dim L = n^2$. Структурные уравнения группы L получаются из уравнений (3):

$$d\pi^I_J = \pi^K_J \wedge \pi^I_K \quad (\pi = \omega|_{\omega^I = 0}) \tag{6}$$

Продолжая уравнения (3), найдем

$$d\omega^I_{JK} = \omega^L_{JK} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{LK} \wedge \omega^L_J - \omega^I_{JL} \wedge \omega^L_K + \omega^L \wedge \omega^I_{JKL}, \tag{7}$$

причем

$$\omega^I_{JKL} \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0$$

Для справедливости последних равенств достаточно выполнение условий полуголономности:

$$\omega^I_{J[KL]} = 0 \tag{8}$$

или, более того, условий голономности - симметричности форм ω^I_{JKL} по всем нижним индексам [1].

Структурные уравнения (1), (3), (7) показывают, что над многообразием V построено главное расслоение неголономных реперов 2-го порядка $\tilde{L}^2(V)$, типовым слоем которого служит неголономная [2] дифференциальная группа 2-го порядка $\tilde{L}^2 \supset L$, $\dim \tilde{L}^2 = n^2(1+n)$. Группа $\tilde{L}^2$ имеет структурные уравнения (6) и следующие

$$d\pi^I_{JK} = \pi^L_{JK} \wedge \pi^I_L - \pi^I_{LK} \wedge \pi^L_J - \pi^I_{JL} \wedge \pi^L_K.$$

Если выполняются условия (5), то из расслоения $\tilde{L}^2(V)$ выделяется подрасслоение голономных реперов $L^2(V)$ с типовым слоем - голономной [1] дифференциальной группой 2-го порядка

$$L^2 \subset \tilde{L}^2, \quad \dim L^2 = n^2 + n\,(C^2_n + n) = \tfrac{1}{2} n^2 (n+3).$$

Далее вводится расслоение неголономных реперов 3-го порядка $\tilde{L}^3(V)$ со структурными формами $\omega^I, \omega^I_J, \omega^I_{JK}, \omega^I_{JKL}$ и типовым слоем - неголономной дифференциальной группой 3-го порядка $\tilde{L}^3 \supset \tilde{L}^2$, $\dim \tilde{L}^3 = n^2(1+n+n^2)$. Если справедливы условия (5), (8), то из расслоения $\tilde{L}^3(V)$ получается расслоение полуголономных реперов $\bar{L}^3(V)$ с типовым слоем - полуголономной [13], [14] дифференциальной группой 3-го порядка $\bar{L}^3 \subset \tilde{L}^3$,

$$\dim \bar{L}^3 = \dim \tilde{L}^3 - n\,(1+n)\,C^2_n = \tfrac{1}{2} n^2 (n^2 + 2n + 3).$$

Если выполняются условия (5) и формы ω^I_{JKL} симметричны