Обозначим через α $(n-2)$-мерную плоскость, полярно сопряженную относительно Q прямой $A_0 A_n$. Имеем

$$\alpha = (A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \qquad (3.7)$$

Т е о р е м а 3.2. Касательные гиперплоскости к гиперповерхностям (A_0) и (A_n) в точках A_0 и A_n содержат $(n-2)$-мерную плоскость α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^k A_k, \quad dA_n = \omega_n^k A_k + \omega_n^n A_n. \qquad (3.8)$$

В силу (3.7) подпространство α содержится в обеих касательных гиперплоскостях.

§4. Конгруэнция фокальных квадратичных элементов

Рассмотрим конгруэнцию C_0, образованную фокальными квадратичными элементами C. Фокальное многообразие квадратичного элемента $C \in C_0$ определяется из уравнений

$$f = 0, \quad x^n = 0, \quad df = 0, \quad dx^n = 0. \qquad (4.1)$$

Учитывая (1.2), (1.3), приводим систему (4.1) к виду:

$$f = 0, \quad x^n = 0, \quad \omega_k \omega^k = 0. \qquad (4.2)$$

Следовательно, любая точка квадратичного элемента $C \in C_0$ является фокальной, т.е. конгруэнция C_0 является конгруэнцией квадратичных элементов с неопределенными фокальными многообразиями. Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает, что конгруэнция C_0 имеет следующее безынтегральное представление. Пусть Q_0 - произвольная невырожденная гиперквадрика, а S - произвольная гладкая гиперповерхность. Квадратичные элементы конгруэнции C_0 образованы сечениями гиперквадрики Q_0 касательными гиперплоскостями к гиперповерхности S.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов//Геометрический сб./ Томский ун-т. Томск. 1964. Вып. 4. С. 26-36.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград. 1976. Вып. 7. С. 54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ГИПЕРКВАДРИК В P_4

В.В. М а х о р к и н
(Калининградский университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция гиперквадрик. Выбор такого объекта исследования обуславливается тем, что это семейство гиперквадрик является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки типа $S_{1,1}$ и, следовательно, фокальные точки второго порядка соответствующего типа.

Всякой конгруэнции гиперквадрик в P_4 естественным образом соответствует семейство [1] гиперквадрик. Пусть открытое множество $U \subset R^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда двухпараметрическое семейство гиперквадрик, соответствующее рассматриваемой конгруэнции, будет [1] пятимерным подмногообразием Z в $U \times P_4$ вместе с проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \to U, \qquad (1)$$

кроме того, имеется проекция на второй сомножитель

$$\pi: Z \to P_4. \qquad (2)$$

Для всякого $t \in U$ $\pi(p^{-1}(t)) \subset P_4$ является гиперквадрикой рассматриваемой конгруэнции, соответствующей параметру $t \in U$. Имеем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi), \qquad (3)$$

где $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения (2), а $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения (2), причем в общем случае $S_0(\pi)$ и $S_1(\pi)$ подмногообразия в Z. Нетрудно показать [2], что $S_1(\pi)$ является трехмерным подмногообразием в Z. Из (3) следует

$$\pi_1(Z) = \pi(S_0(\pi)) \cup \pi(S_1(\pi)). \qquad (4)$$

Для всякого $t \in U$ положим

$$\mathcal{Z}_t = p^{-1}(t), \quad (S_0(\pi))_t = S_0(\pi) \cap \mathcal{Z}_t, \quad (S_1(\pi))_t = S_1(\pi) \cap \mathcal{Z}_t.$$

Таким образом, для всякого $t \in U$ имеем

$$\pi(\mathcal{Z}_t) = \pi((S_0(\pi))_t) \cup \pi((S_1(\pi))_t). \qquad (5)$$

Рассмотрим сужения отображений (1) и (2) на

$$p: S_1(\pi) \to U, \qquad (6)$$

$$\pi: S_1(\pi) \to P_4. \qquad (7)$$

Множество особых точек коранга один отображения (7) является [2] множеством особых точек типа $S_{1,1}$ отображения (2) и обозначается $S_{1,1}(\pi)$. Можно показать [2], что в общем случае множество $S_{1,1}(\pi)$ является двумерным подмногообразием в $\mathcal{Z}$. Как и выше, положим $(S_{1,1}(\pi))_t = S_{1,1}(\pi) \cap \mathcal{Z}_t$.
Очевидно, что

$$(S_{1,1}(\pi))_t = S_{1,1}(\pi) \cap (S_1(\pi))_t.$$

Естественным образом имеем следующие отображения:

$$p: S_{1,1}(\pi) \to U, \qquad (8)$$

$$\pi: S_{1,1}(\pi) \to P_4. \qquad (9)$$

Используя подвижной репер $\{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 4)$ в P_4, зададим многообразие $\mathcal{Z}$ в $U \times P_4$ следующим образом:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (10)$$

Кроме того, имеем

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta, \qquad (11)$$

$$\Delta \Lambda_{\alpha\beta i} = \Lambda_{\alpha\beta ij}\, \tau^j. \qquad (12)$$

Здесь τ^i инвариантные формы параметрической группы, величины $a_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{\alpha\beta i}$, $\Lambda_{\alpha\beta ij}$ зависят от параметра $t \in U$. Критические точки коранга один отображения (2) определяются [3] следующей системой уравнений:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad \Lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (13)$$

Фиксируя в системе (13) параметр $t \in U$, получим систему уравнений, определяющую фокальное многообразие первого порядка гиперквадрики $\pi(\mathcal{Z}_t)$, которое в общем случае является одномерным алгебраическим многообразием восьмого порядка, и, следовательно, отображение (6) представляет собой двухпараметрическое семейство таких кривых.

Критические точки типа $S_{1,1}$ отображения (2) определяются (3) следующей системой уравнений:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad \Lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad \Delta = 0, \qquad (14)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Lambda_{\alpha\beta 11}\, x^\alpha x^\beta & \Lambda_{\alpha\beta 12}\, x^\alpha x^\beta \\ \Lambda_{\alpha\beta 21}\, x^\alpha x^\beta & \Lambda_{\alpha\beta 22}\, x^\alpha x^\beta \end{vmatrix}.$$

Фиксируя в системе (14) параметр $t \in U$, получим систему уравнений, определяющую фокальное многообразие второго порядка (типа $S_{1,1}$) гиперквадрики $\pi(\mathcal{Z}_t)$, которое в общем случае является нульмерным алгебраическим многообразием порядка 2^5.
Из анализа, проведенного выше, следует

Т е о р е м а. Фокальные точки второго порядка (типа $S_{1,1}$) гиперквадрики $\pi(\mathcal{Z}_t)$ конгруэнции (2) являются фокальными точками первого порядка кривой $\pi((S_1(\pi))_t)$ конгруэнции (6).

Библиографический список

1. М а х о р к и н В.В. Фокальные точки первого порядка // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 116-119.

2. Г о л у б и ц к и й М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977. 290с.

3. Ф а м Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М.: Мир, 1977. 164с.