УДК 514.548

А. С. Кочина [1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

A_kochina@mail.ru

Замечательные кривые как образы окружностей и прямых при конформных отображениях

Рассматриваются образы семейства окружностей и прямых при некоторых конформных отображениях. Показано, что эти образы являются замечательными кривыми, такими как кардиоида, лемниската Бернулли, логарифмическая спираль.

Ключевые слова: комплексная функция, конформные отображения, образы окружностей, замечательные кривые.

Рассмотрим семейство окружностей, имеющих общую точку в начале полярной системы координат и симметричных относительно полярной оси. В полярной системе координат это семейство окружностей задается следующим образом (рис. 1):

$$r = a\cos\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ a > 0,\ a \in \Re.$$

Рассмотрим комплексное отображение

$$\omega = f(z) = z^2.$$

Комплексный аргумент z можно представить в виде $z = re^{i\varphi}$, где $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты на плоскости (z). Тогда

$$\omega = f(z) = z^2 = r^2 e^{i\cdot 2\varphi}.$$

Поступила в редакцию 22.05.2018 г.

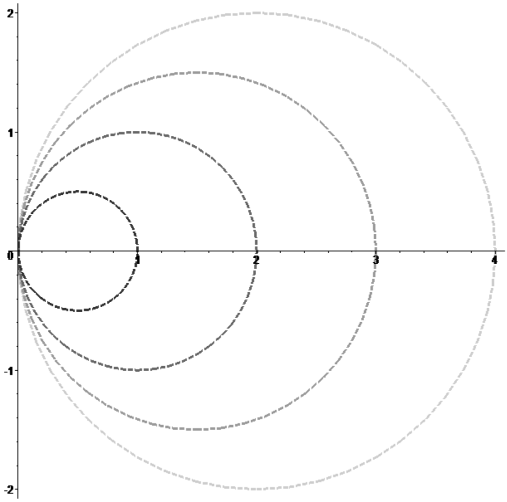

Рис. 1. Семейство окружностей $r = a\cos\varphi$

Пусть (ρ, Φ) — полярные координаты точек образа на плоскости (ω), тогда

$$\rho = r^2,\ \Phi = 2\varphi.$$

Имеем

$$\begin{cases} r = a\cos(\varphi) \\ \rho = r^2 \\ \Phi = 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = a^2\cos^2(\varphi) \\ \Phi = 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = a^2\cos^2\frac{\Phi}{2}.$$

Таким образом, при отображении

$$\omega = f(z) = z^2$$

точки (r, φ) переходят в точки (ρ, Φ), связанные уравнением

$$\rho = \frac{a^2}{2}(1 + \cos\Phi),\ \Phi \in [-\pi, \pi].$$

Полученное уравнение является уравнением семейства кардиоид на плоскости в системе координат (ρ, Φ). При этом сохраняется заданная нами конфигурация исходного семейства окружностей: все кардиоиды семейства-образа также проходят через начало координат и симметричны относительно полярной оси (рис. 2).

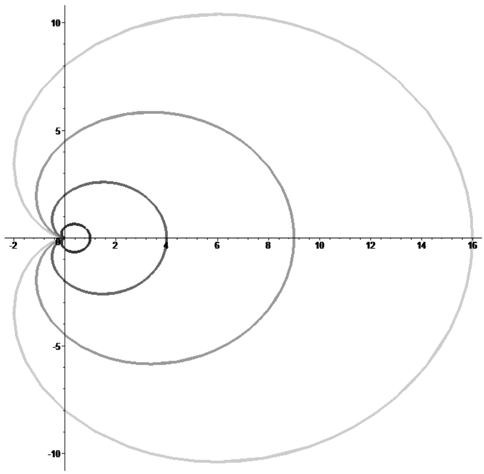

Рис. 2. Семейство образов при отображении $f(z) = z^2$

Рассмотрим одну ветвь отображения:

$$\omega = f(z) = \sqrt{z}.$$

В полярных координатах оно будет иметь следующий вид:

$$\omega = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Тогда полярные координаты точек образа на плоскости (ω) будут иметь вид

$$\rho = \sqrt{r},\ \Phi = \frac{\varphi}{2}.$$

Имеем

$$\begin{cases} r = a\cos(\varphi) \\ \rho = \sqrt{r} \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a\cos(\varphi)} \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{2} \end{cases} \Rightarrow \rho = \sqrt{a\cos 2\Phi}.$$

Мы видим, что при отображении

$$\omega = f(z) = \sqrt{z}$$

точки (r, φ) переходят в точки (ρ, Φ), связанные уравнением

$$\rho = \sqrt{a\cos 2\Phi},\ \Phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Мы получили, таким образом, уравнение семейства правых петель лемнискат Бернулли. Все лемнискаты семейства, как и все окружности семейства-прообраза, проходят через начало координат; симметрия относительно полярной оси также сохранена (рис. 3).

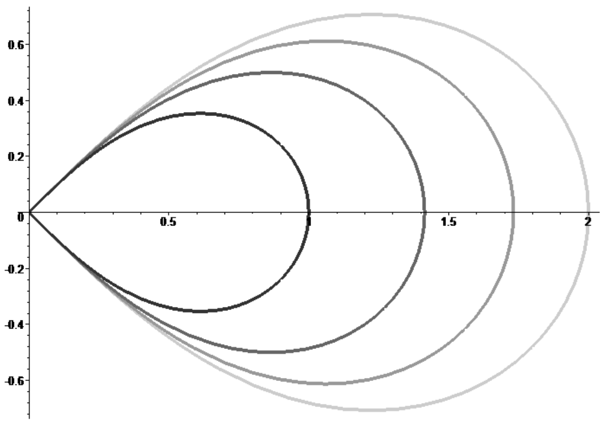

Рис. 3. Семейство образов при отображении $f(z) = \sqrt{z}$

Рассмотрим теперь образы прямых вида $y = kx$ при отображении

$$\omega = f(z) = e^z.$$

Имеем

$$z = x + iy = x + i \cdot kx, \; \omega = e^z = e^x \cdot e^{i \cdot kx}.$$

Тогда в полярной системе координат уравнения образа прямых имеют вид

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \Phi = kx \end{cases} \Rightarrow \rho = e^{\frac{\Phi}{k}}.$$

Полученное уравнение определяет семейство логарифмических спиралей, разворачивающихся из точки (1, 0) в полярных координатах (рис. 4).

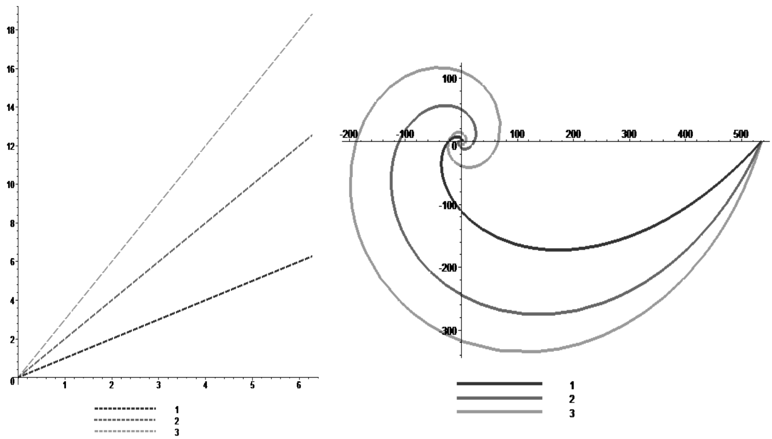

Рис. 4. Семейство образов прямых при отображении $f(z) = e^z$

По рисунку семейства образов можно судить о влиянии параметра k на вид спирали, то есть он увеличивает количество вращений, уменьшая радиусы спиралей.

Список литературы

1. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. М., 2003.
2. *Клочко Т.В., Парфенова Н.Д.* Решение задач комплексного анализа средствами MAPLE. Харьков, 2009.

A. Kochina[1]

[1] Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
A_kochina@mail.ru

Remarkable curves as images of circles and lines under conformal maps

Submitted on May 22, 2018

We consider images of a family of circles under some conformal maps. It is shown that the images of these lines are remarkable curves, such as cardioid, lemniscate of Bernoulli, logarithmic spiral.

Keywords: complex function, conformal mapping, the images of circles, remarkable curves.

References

1. *Krasnov, M.L., Kiselev, A.I., Makarenko, G.I.*: Functions of a complex variable. Moscow (2003) (in Russian).
2. *Klochko, T.V., Parfenova, N.D.*: The solution of problems of complex analysis by means of MAPLE. Kharkiv (2009) (in Russian).