УДК 514.764.22

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра

(Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва)

СВОЙСТВА ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Векторное поле на римановом многообразии называется инфинитезимальным гармоническим преобразованием, если индуцированная им группа локальных преобразований многообразия состоит из локальных гармонических диффеоморфизмов (см. [1 — 3]). В настоящей статье мы продолжаем изучение свойств инфинитезимальных гармонических преобразований.

1. Ранее было установлено (см. [1 — 3]), что если тензор Риччи компактного многообразия (M^n, g) неположительно определен, то каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование X многообразия (M^n, g) является ковариантно постоянным векторным полем. Если же тензор Риччи отрицательно определен, то X — нулевое векторное поле.

Сформулируем здесь локальный аналог этого утверждения. Для этого введем в рассмотрение скалярную функцию $E(X) = 2^{-1} g(X, X)$, называемую *энергией векторного поля X* (см., напр., [4]). Тогда будет справедливой

Теорема 1. *Пусть X — инфинитезимальное гармоническое преобразование некомпактного риманова многообразия* (M^n, g) *с отрицательно определенным тензором Риччи* Ric. *Если энергия* $E(X)$ *векторного поля X имеет локальный максимум в некоторой точке* $x \in M^n$, *то в самой точке и некоторой ее окрестности* U_x *поле X — тождественный нуль.*

Доказательство. Допустим, что энергия $E(X)$ векторного поля X имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in M^n$, тогда в этой точке $\Delta E(X) := trace_g\,(Hess\,E(X)) \le 0$. С другой стороны, непосредственные вычисления с использованием уравнения $\Delta X = 2\,Ric^* X$, характеризующего инфинитезимальное гармоническое преобразование X (см. [1 — 3]), позволяет найти выражение $\Delta E(X) = g(\nabla X, \nabla X) - Ric(X, X)$. Тогда в предположении об отрицательной определенности кривизны Риччи имеем, что на M^n всюду $\Delta E(X) > 0$, если только $X \ne 0$. Из этих двух неравенств заключаем, что X должен быть нулем в точке $x \in M^n$. Но так как $E(X)$ имеет локальный максимум в $x \in M^n$ и при этом $E(X) > 0$ всюду на M^n, если только $X \ne 0$, то X должен обращаться в нуль и в некоторой окрестности U_x точки $x \in M^n$.

2. Для некомпактного многообразия (M^n, g) было установлено (см. [1; 3]), что каждая инфинитезимальная изометрия X, определяемая условием $L_X g = 0$, является гармоническим преобразованием. В свою очередь, при $n = 2$ каждое инфинитезимальное конформное преобразование X, определяемое условием $L_X g = 2^{-1}(div\, X)g$, является гармоническим. И далее (см. [2]), при $n > 2$ каждое инфинитезимальное конформное преобразование, которое является гармоническим, есть либо инфинитезимальная гомотетия, т.е. $divX = const$, либо изометрия. Вариант этих утверждений для компактного многообразия имеет вид следующей теоремы.

Теорема 2. *На компактном многообразии (M^n, g) каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование X является инфинитезимальным конформным преобразованием, если $n = 2$, и инфинитезимальной изометрией, если $divX = const$.*

Доказательство. Рассмотрим для компактного многообразия M^n $(n \ge 2)$ ориентированное двулистное накрытие и воспользуемся формулой К. Яно (см. [5], гл. 2, формула (1.14)):

$$\int_{M^n}\left(g\left(\square X - n^{-1}(n-2)d\left(divX\right), X\right) - 2^{-1}\left\|L_X g - 2n^{-1}\left(divX\right)g\right\|^2\right)dV = 0,$$

где $\square X = \Delta X - 2\,Ric^* X$. Из данной формулы в предположении, что $\square X = 0$ и $n = 2$, выводим, что $L_X g = 2^{-1}(div\,X)g$, и, следовательно, X — инфинитезимальное конформное преобразование. С другой стороны, при $\square X = 0$, $div\,X = const$ и $n > 2$ из формулы вытекает, что $L_X g = 0$, и, следовательно, X — инфинитезимальная изометрия.

3. Наряду с инфинитезимальным гармоническим преобразованием существует определение *гармонического векторного поля* (см. [6, с. 34—35]). Каждое такое поле Y определяется на многообразии (M^n, g) уравнениями $div\,Y = 0$ и $d\,\theta = 0$ для 1-формы θ, двойственной Y. В компактном случае эти уравнения равносильны одному $\Delta Y = 0$. Справедлива

Теорема 3. *На компактном многообразии Эйнштейна* (M^n, g) *векторные пространства инфинитезимальных гармонических преобразований* $\mathcal{H}(M^n, \mathbf{R})$ *и гармонических векторных полей* $\mathbf{H}(M^n, \mathbf{R})$ *ортогональны.*

Доказательство. Рассмотрим для компактного риманова многообразия (M^n, g) его ориентированное двулистное накрытие и воспользуемся теоремой Грина $\int_{M^n}(div\,Z)dv = 0$ для векторного поля $Z = \nabla_X Y - (divY)X$; будем иметь

$$\int_{M^n}\left(Ric(X,Y) + \nabla X\,\nabla Y + (divX)(divY)\right)dv = 0. \qquad (*)$$

Пусть теперь (M^n, g) — многообразие Эйнштейна, которое, как известно, характеризуется равенствами $Ric = \frac{s}{n}g$ при $s = const$. Полагаем далее X и Y — произвольными инфинитезимальным гармоническим преобразованием и, соответственно, гармоническим векторным полем на (M^n, g). Тогда формула ($*$) примет вид:

$$0 = \int_{M^n} Ric(X,Y)dv + \int_{M^n} g(\nabla^* \nabla X, Y)dv =$$

$$= 2\int_{M^n} Ric(X,Y)dv = \frac{2s}{n}\int_{M^n} g(X,Y)dv := \frac{2s}{n}\langle X, Y\rangle .$$

4. Векторное пространство $\mathcal{H}(M^n,\mathbf{R})$ инфинитезимальных гармонических преобразований на компактном римановом многообразии (M^n, g) имеет конечную размерность (см. [1; 3]), и при этом векторное пространство $\mathbf{K}(M^n, \mathbf{R})$ инфинитезимальных изометрий риманова многообразия (M^n, g) содержится в $\mathcal{H}(M^n,\mathbf{R})$.

Обозначим через $\mathcal{H}^*(M^n,\mathbf{R})$ и $\mathbf{K}^*(M^n, \mathbf{R})$ векторные пространства 1-форм, двойственных пространствам $\mathcal{H}(M^n,\mathbf{R})$ и $\mathbf{K}$ (M^n, $\mathbf{R}$) соответственно. Тогда согласно результатам второго параграфа пространство $\mathbf{K}^*(M^n, \mathbf{R})$ будет состоять из козамкнутых 1-форм пространства $\mathcal{H}^*(M^n,\mathbf{R})$, т.е. таких 1-форм $\omega \in \mathcal{H}^*(M^n, \mathbf{R})$, что $d^*\omega = 0$.

Известно (см., напр., [7], с. 240), что на компактном римановом многообразии (M^n, g) пространства $Im\, d$ и $Ker\, d^*$ согласно тождеству $\langle d\omega, \theta\rangle = \langle \omega, d^*\theta\rangle$ являются ортогональными дополнениями друг друга.

Ограничимся далее компактным эйнштейновым многообразием (M^n, g), на котором согласно теореме 3 пространство $\mathcal{H}^*(M^n,\mathbf{R})$ будет ортогональным пространству гармонических 1-форм $\mathbf{H}^*(M^n,\mathbf{R})$, т.е. форм, принадлежащих $Ker\ d \cap Ker\, d^*$. В этом случае в $\mathcal{H}^*(M^n,\mathbf{R})$ можно ввести в рассмотрение векторное подпространство $\mathbf{D}^*$(M^n, $\mathbf{R}$) точных 1-форм, которое будет ортогональным дополнением подпространства $\mathbf{K}^*(M^n, \mathbf{R})$ в $\mathcal{H}^*\left(M^n, \mathbf{R}\right)$. Каждая такая 1-форма $\omega := df$ для некоторой $f \in C^\infty M^n$ такой, что $\Delta f = \dfrac{2s}{n} f$. Это уравнение равносильно уравнению $\Delta X = 2\,Ric^* X$, которому должно удовлетворять двойственное $\omega = df$ векторное поле X. Заметим, что уравнение $\Delta f = \dfrac{2s}{n} f$ имеет нетривиальное решение $\left(f \neq const\right)$ тогда и только тогда (см. [5], гл. 2, предложение 1.3), когда $s > 0$, что согласуется с нашим утверждением, сформулированным в начале первого параграфа. Доказана

Теорема 4. *На компактном многообразии Эйнштейна* (M^n, g) *справедливо ортогональное разложение*

$$\mathbf{H}\,(M^n, \mathbf{R}) = \mathbf{K}\,(M^n, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{D}\,(M^n, \mathbf{R}).$$

Заметим, что ранее К. Яно и Т. Нагано (см. [8]) непосредственными вычислениями в координатной форме пришли к аналогичному заключению, но без утверждения об ортогональности компонент разложения.

Список литературы

1. *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations // Annals of Global Analysis and Geometry. 2003. T. 24. C. 291—299.
2. *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Гармонические диффеоморфизмы многообразий // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. №2. С. 154—171.
3. *Смольникова М.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Инфинитезимальные гармонические преобразования // Известия вузов. Математика. 2004. №5. С. 69—75.
4. *Udriste C.* Properties of torse forming vector fields // Tensor, N.S. 1985. Vol. 42. P. 137—144.
5. *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. New York: Marcel Dekker, 1970.
6. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1975.
7. *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и тех-

ники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 28. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1988. С. 5—289.

8. *Yano K., Nagano T.* On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian space // Comment. Math. Helv. 1961. Vol. 35. No. 1. P. 55—64.

S. Stepanov, I. Shandra

PROPERTIES OF INFINITESIMAL
HARMONIC TRANSFORMATIONS

We have defined the infinitesimal harmonic transformation in a Riemannian manifold (see [1]). In the present paper we continue studying local and global geometries of infinitesimal harmonic transformations.

УДК 514.764.22

Е. С. Степанова, И. И. Цыганок

*(Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва;
Владимирский филиал Российского университета кооперации)*

ПРИМЕР СТАТИСТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение

С. Лауритцен [1, с. 163—216], обобщая «геометростатистику» Н. Н. Ченцова (см. [2]), ввел понятие *статистического многообразия* как триплета (M^n, g, D). Здесь, по замыслу автора, гладкое n-мерное $(n \geq 2)$ многообразие M^n должно было символизировать многообразие распределений вероятностей, метрический тензор g — олицетворять фишеровский информационный тензор, а семейство линейных связностей ${}^{\gamma}\nabla = \nabla + \gamma D$, где ∇ — связность Леви-Чивита, $D \in C^{\infty}S^3M^n$ и γ — произвольный вещественный параметр, — интерпрети-