УДК 514.75

О.В. Сазонова
(Калининградский государственный университет)

СИММЕТРИЧНЫЕ И ПОЛУСИММЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

В пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ рассматривается поверхность как семейство точек X_m и как семейство касательных плоскостей TX_m. Введено пространство аффинной связности $A_{n,n}$ с зависимым на поверхности X_m кручением. Ограничение полей тензоров кручения и кривизны на поверхность TX_m дает ряд простейших и простых подтензоров. Это позволяет провести классификацию поверхностей пространства $A_{n,n}$ в зависимости от симметрии ее фундаментальных объектов.

Отнесем n-мерное пространство аффинной связности $A_{n,n}$ к подвижному реперу $\{A, \bar{e}_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого задаются формулами

$$dA=\omega^I\,\bar{e}_I,\; d\bar{e}_I=\omega_I^J\,\bar{e}_J+\omega^J\,\bar{e}_{IJ}\;\;(I,J,K=\overline{1,n}). \tag{1}$$

Структурные уравнения Картана форм ω^I,ω_J^I задаются в виде:

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I+S_{JK}^I\,\omega^J\wedge\omega^K\;\;(S_{(JK)}^I=0), \tag{2}$$

$$D\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+R_{JKL}^I\omega^K\wedge\omega^L\;\;(R_{J(KL)}^I=0).$$

Тензоры кручения S={ S^I_{JK} } и кривизны R={ R^I_{JKL} } удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta S^I_{JK} = S^I_{JKL}\,\omega^L,\ \Delta R^I_{JKL} = R^I_{JKLM}\omega^M, \tag{3}$$

где Δ – дифференциальный оператор, действующий по закону:

$$\Delta S^I_{JK} = d S^I_{JK} + S^L_{JK}\omega^I_L - S^I_{LK}\omega^L_J - S^I_{JL}\omega^L_K .$$

Отметим особые случаи пространства аффинной связности: 1) S=0 – пространство со связностью без кручения; 2) R=0 – пространство со связностью без кривизны; 3) S=0, R=0 – локально аффинное пространство.

В пространстве аффинной связности общего вида $A_{n,n}$ зададим m-мерную поверхность X_m. Поскольку X_m представляется как m-параметрическое семейство, описанное точкой $A \in A_{n,n}$, уравнения поверхности имеют вид:

$$\omega^a = \Lambda^a_i\,\omega^i \ (i, j, k=\overline{1,m}\,;\ a, b, c=\overline{m+1,n}\,). \tag{4}$$

Продолжая (4), получаем дифференциальные уравнения для компонент Λ^a_i фундаментального объекта 1-го порядка Λ^1 поверхности X_m:

$$\Delta\,\Lambda^a_i - \Lambda^b_i\Lambda^a_j\omega^j_b + \omega^a_i = \Lambda^a_{ij}\omega^j . \tag{5}$$

Коэффициенты Λ^a_{ij} представляют собой сумму симметричной и антисимметричной составляющих $\Lambda^a_{ij} = \hat{\Lambda}^a_{ij} + \breve{\Lambda}^a_{ij}$, где $\hat{\Lambda}^a_{ij} = \hat{\Lambda}^a_{ji}$ получены при использовании леммы Картана,

$$\breve{\Lambda}^a_{ij} = -S^a_{ij} + \Lambda^a_k S^k_{ij} - \Lambda^b_i S^a_{bj} + \Lambda^b_j S^a_{bi} +$$
$$+ \Lambda^a_k(\Lambda^b_i S^k_{bj} - \Lambda^b_j S^k_{bi}) - \Lambda^b_i\Lambda^c_j(S^a_{bc} - \Lambda^a_k S^k_{bc}) = -\breve{\Lambda}^a_{ji} .$$

Таким образом, в общем случае $\Lambda^a_{ij} \neq \Lambda^a_{ji}$. Выясним условия симметрии коэффициентов Λ^a_{ij}:

1) S=0 – пространство без кручения,

2) $S^a_{IJ} = \Lambda^a_k \; S^k_{IJ}$ – справедливость (n-m)(n-1)n/2 равенств, когда

$$\breve{\Lambda}^a_{ij} = -S^a_{ij} + \Lambda^a_k S^k_{ij} - \Lambda^b_i (S^a_{bj} - \Lambda^a_k S^k_{bj}) -$$
$$-\Lambda^b_j (S^a_{bi} - \Lambda^a_k S^k_{bi}) - \Lambda^b_i \Lambda^c_j (S^a_{bc} - \Lambda^a_k S^k_{bc}) = 0 .$$

Во втором, более общем, случае будем говорить о пространстве $A_{n,n}$ с зависимым на поверхности X_m кручением. Найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $M^a_{IJ} = S^a_{IJ} - \Lambda^a_k \; S^k_{IJ}$. Используя уравнения (3,5), получим

$$\Delta M^a_{IJ} - \Lambda^a_k M^b_{IJ} \omega^k_b \equiv 0 , \tag{6}$$

где символ ≡ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. Поскольку M={ M^a_{IJ} } – псевдотензор [1] на поверхности X_m, то пространства аффинной связности $A_{n,n}$ с зависимым на поверхности кручением (M^a_{IJ} =0) могут существовать.

Произведем дальнейшую специализацию подвижного репера R={A, $\bar{e}_i$, $\bar{e}_a$ }, помещая векторы $\bar{e}_i$ в соответствующую касательную плоскость T_m , при этом

$$\Lambda^a_i = 0. \tag{7}$$

Система уравнений семейства TX_m касательных плоскостей T_m аналогична соответствующей системе в аффинном пространстве [2]:

$$\omega^a = 0, \; \omega^a_i = \Lambda^a_{ij} \omega^j , \tag{8}$$

однако коэффициенты имеют более общие выражения $\Lambda^a_{ij} = \hat{\Lambda}^a_{ij} - S^a_{ij}$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta \; \Lambda^a_{ij} = \Lambda^a_{ijk} \; \omega^k , \tag{9}$$

$$\Lambda^a_{ijk} = \hat{\Lambda}^a_{ijk} + \breve{\Lambda}^a_{ijk}, \ \hat{\Lambda}^a_{i[jk]} = 0, \ \breve{\Lambda}^a_{ijk} = \Lambda^a_{il} S^l_{jk} - R^a_{ijk}. \qquad (10)$$

Геометрический объект $\Lambda^2 = \{\Lambda^a_{ij}\}$ является фундаментальным тензором второго порядка поверхности X_m и фундаментальным тензором первого порядка семейства TX_m [3]. В общем случае Λ^a_{ij} и Λ^a_{ijk} не симметричны по нижним индексам. Условиями симметричности компонент Λ^a_{ij} являются равенства $S^a_{ij}=0$, которые с учетом (7) выполняются в пространстве с зависимым кручением и, в частности, в пространстве без кручения.

С помощью системы уравнений (8) уравнения $(З_1)$ принимают вид:

$$\Delta S^i_{jk} + S^a_{jk}\omega^i_a \equiv 0, \ \Delta S^i_{aj} + S^i_{jk}\,\omega^k_a + S^b_{aj}\omega^i_b \equiv 0, \qquad (11)$$

$$\Delta S^i_{ab} + S^c_{ab}\omega^i_c \equiv 0, \ \Delta S^a_{ij} \equiv 0, \ \Delta S^a_{bi} + S^a_{ij}\,\omega^j_b \equiv 0, \ \Delta S^a_{bc} \equiv 0.$$

Теорема 1. *Ограничение поля тензора кручения* S^I_{JK} *на поверхность* TX_m *дает два простейших [4] подтензора* $\{S^a_{ij}\}$, $\{S^a_{bc}\}$ *и четыре простых [4] подтензора* $\{S^i_{jk}, S^a_{ij}\}$, $\{S^i_{aj}, S^i_{jk}, S^a_{bi}, S^a_{ij}\}$, $\{S^i_{ab}, S^a_{bc}\}$, $\{S^a_{bi}, S^a_{ij}\}$.

Обращение тензора S^a_{ij} в нуль на поверхности TX_m характеризует поверхность TX_m, которая задается фундаментальным тензором $\Lambda^2 = \{\Lambda^a_{ij}\}$ с симметричными компонентами.

Определение 1. Будем называть S^a_{ij} тензором несимметричности 1-го порядка поверхности TX_m; поверхность TX_m, на которой $S^a_{ij}=0$, – симметричной порядка 1 поверхностью, а в случае $S^a_{ij} \neq 0$ – несимметричной поверхностью.

Уравнения (3_2) преобразуются следующим образом:

$$\Delta R^i_{jkl} + R^a_{jkl}\omega^i_a \equiv 0,$$
$$\Delta R^i_{abc} + R^d_{abc}\omega^i_d - R^i_{jbc}\omega^j_a + R^i_{acj}\omega^j_b - R^i_{abj}\omega^j_c \equiv 0,$$
$$\Delta R^i_{ajk} + R^b_{ajk}\omega^i_b - R^i_{ljk}\omega^l_a \equiv 0,\ \Delta R^i_{jka} + R^b_{jka}\omega^i_b - R^i_{jkl}\omega^l_a \equiv 0,$$
$$\Delta R^i_{abj} + R^c_{abj}\omega^i_c - R^i_{jkb}\omega^k_a + R^i_{ajk}\omega^k_b \equiv 0, \tag{12}$$
$$\Delta R^i_{jab} + R^c_{jab}\omega^i_c - R^i_{jkb}\omega^k_a + R^i_{jka}\omega^k_b \equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{ijk} \equiv 0,\ \Delta R^a_{bcd} + R^a_{bdi}\omega^i_c - R^a_{icd}\omega^i_b - R^a_{bci}\omega^i_d \equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{bij} - R^a_{kij}\omega^k_b \equiv 0,\ \Delta R^a_{ijb} - R^a_{ijk}\omega^k_b \equiv 0,$$
$$\Delta R^a_{bci} + R^a_{jic}\omega^j_b + R^a_{bij}\omega^j_c \equiv 0,\ \Delta R^a_{ibc} - R^a_{ijc}\omega^j_b + R^a_{ijb}\omega^j_c \equiv 0.$$

Теорема 2. *Сужение поля тензора кривизны* R^I_{JKL} *на поверхность* TX_m *дает один простейший подтензор* $\{R^a_{ijk}\}$ *и десять простых подтензоров:* $\{R^i_{jkl}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^a_{bij}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^a_{ijb}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^i_{ajk}, R^a_{bij}, R^i_{jkl}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^i_{jka}, R^a_{ijb}, R^i_{jkl}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^a_{bci}, R^a_{bij}, R^a_{ijb}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^a_{ibc}, R^a_{ijb}, R^a_{ijk}\}$, $\{R^a_{bcd}, R^a_{bci}, R^a_{ibc}, R^a_{ijk}, R^a_{ijb}, R^a_{bij}\}$, $\{R^i_{abj}, R^a_{bci}, R^a_{bij}, R^a_{ijb}, R^a_{ijk}, R^i_{jka}, R^i_{ajk}, R^i_{jkl}\}$, $\{R^i_{jab}, R^a_{ibc}, R^a_{ijb}, R^i_{jka}, R^a_{ijk}, R^i_{jkl}\}$.

Используя (9, 11, 12), получим дифференциальные уравнения для величин (10_3):

$$\Delta \breve{\Lambda}^a_{ijk} + S^b_{jk}\omega^a_{bi} \equiv 0\ \ (\omega^a_{bi} = -\Lambda^a_{ji}\omega^j_b).$$

Равенства $\breve{\Lambda}^a_{ijk}=0$, инвариантные лишь в совокупности с равенствами $S^a_{ij}=0$, позволяют говорить о симметрии компонент Λ^a_{ijk} по нижним индексам.

Определение 2. Объект $\{\breve{\Lambda}^a_{ijk}, S^a_{ij}\}$ назовем псевдотензором несимметричности 2-го порядка поверхности TX_m. Поверхность TX_m, на которой $S^a_{ij}=0$, $\breve{\Lambda}^a_{ijk}=0$, будем называть симметричной порядка 2 поверхностью; в случае $S^a_{ij}=0$, $\breve{\Lambda}^a_{ijk} \neq 0$ – полусимметричной порядка 2 поверхностью.

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 82 с.
2. *Сырокващина А.Н.* Параллельные перенесения нормали поверхности аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. Вып. 30. С. 84 – 88.
3. *Сазонова О.В.* Редукция аффинной группы до пространства билинейной связности над оснащенной поверхностью // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2003. Вып. 34. С. 125 – 130.
4. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2002. 112 с.

O. Sazonova

THE SYMMETRIC AND SEMISYMMETRIC SURFACES IN AFFINELY CONNECTED SPACE

In affinely connected space $A_{n,n}$ the surface as a set of points X_m and as a family of tangent planes TX_m is considered. The space $A_{n,n}$ with dependent torsion on a surface X_m is entered. The restriction of fields of torsion and curvature tensors on a surface TX_m gives a series elementary and simple subtensors. It allows to lead the classification of surfaces of a space $A_{n,n}$ depending on a symmetry of its fundamental objects.