УДК 514.75

Н.А. Елисеева
Калининградский государственный технический университет
ne2705@gmail.com

Инвариантные оснащения структурного $\varLambda$-подрасслоения гиперповерхности Ω_{n-1}

Изучается гиперповерхность $\Omega_{n-1} \subset P_n$, несущая тройку сильно взаимных подрасслоений [1]. Построены инвариантные оснащения структурного $\varLambda$-подрасслоения гиперповерхности Ω_{n-1}.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, плоскость Картана, плоскость Кенигса, $\nu\Lambda$-виртуальная плоскость Кенигса, точка Кенигса, $\nu\Lambda$-виртуальная точка Кенигса.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\sigma, \tau = \overline{1, n-1}\,;\; p, q, t = \overline{1, r}\,;\; u, v = \overline{r+1, n-1}\,;\; \bar{J}, \bar{K} = \overline{0, n}\,.$$

Изучаемая гиперповерхность Ω_{n-1} является специальным классом трехсоставного сильно взаимного распределения (VH-распределения) [2] проективного пространства P_n, основные структурные подрасслоения которого связаны соотношениями:

$$\Lambda_r(A_0) \subset M_m(A_0) \subset H_{n-1}(A_0)\,,\; M_m(A_0) = \left[\Lambda_r(A_0), L_s(A_0)\right],$$

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) = \left[L_s(A_0), E_{n-m-1}(A_0)\right],\; \Psi_{n-s-1}(A_0) = \left[\Lambda_r(A_0), E_{n-m-1}(A_0)\right],$$

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = L_s(A_0)\,,\; \Psi_{n-s-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = \Lambda_r(A_0)\,,$$

где $\Phi_{n-r-1}(A_0)$, $\Psi_{n-s-1}(A_0)$, $E_{n-m-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$ при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых $\varLambda$-, L-, M-подрасслоений. Если оснащающее H-подрасслоение голономно, то проективное пространство P_n расслаивается на однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1}, огибающих элементы H-подрасслоения. В случае, когда каждое из оснащающих $\varLambda$-, L-, E-подрасслоений является взаимным, получаем гиперповерхность V_{n-1}, несущую тройку сильно взаимных подрасслоений, которую обозначим Ω_{n-1} [1].

Пусть гиперповерхность $\Omega_{n-1} \subset P_n$ оснащена полем инвариантных нормалей $\nu(A_0)$ [3]. Найдем фокальное многообразие нормали 1-го рода $N_{n-r}(A_0) = [\Phi_{n-r-1}(A_0), \nu(A_0)]$ элемента Λ-подрасслоения при смещении точки $A_0 \in \Omega_{n-1}$ вдоль интегральных кривых Λ-подрасслоения:

$$(\lambda):\begin{cases}\omega_0^n = 0, \omega_0^v = 0, \omega_0^p = \mu^p\theta,\\ d\theta = \theta \wedge \theta_0^0, \nabla\mu^p - \mu^p\left(\omega_0^0 + \theta_0^0\right) = \mu_1^p\theta.\end{cases} \tag{1}$$

Плоскость $N_{n-r}(A_0)$ в локальном репере R^1 имеет вид:

$$x^v - \nu_n^v x^n = 0\,, \tag{2}$$

а соседний слой поля нормалей 1-го рода N_{n-r} Λ-подрасслоения представим в виде

$$\tilde{x}^u - \left(\nu_n^u - d\nu_n^u + \ldots\right)\tilde{x}^n = 0\,, \tag{3}$$

где все преобразования ведутся с точностью до величин 1-го порядка малости [4].

Теперь, учитывая (2), (3), а также, что координаты точек проективного пространства P_n преобразуются по формулам [4] $\tilde{x}^{\bar{J}} = x^{\bar{J}} - \omega_{\bar{K}}^{\bar{J}} x^{\bar{K}}$, получим, что при смещении вдоль кривых (1) координаты фокальной точки $F = x^0 A_0 + x^v A_v + x^n A_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(x^0\delta_q^p - \varLambda_{vq}^p x^v + \hat{\nu}_{nq}^p x^n\right)\mu^q\theta = 0,\ x^p - \nu_n^p x^n = 0, \tag{4}$$

где

$$\hat{\nu}^p_{nq} = \nu^p_{nq} - \Lambda^n_{tq}\nu^t_n\nu^p_n, \quad \nabla\hat{\nu}^p_{nq} + \hat{\nu}^p_{nq}\omega^0_0 - \omega^0_n\delta^p_q - \Lambda^p_{vq}\omega^v_n - \nu^t_n\delta^p_q\omega^0_t = \hat{\nu}^p_{nq\sigma}\omega^\sigma_0 .$$

Система (4) допускает нетривиальное решение для произвольных μ^q только тогда, когда

$$\det\left\| x^0\delta^p_q + \Lambda^p_{vq}x^v + \hat{\nu}^p_{nq}x^n \right\| = 0, \; x^p - \nu^p_n x^n = 0. \tag{5}$$

Уравнения (5) задают $(n-r-1)$-мерное фокальное многообразие порядка r нормали $N_{n-r}(A_0)$, которое обозначим $\Phi^r_{n-r-1}(\nu)$.

Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообразия (5) имеет вид

$$x^0 - \lambda^0_v x^v - \nu^0_n x^n = 0, \; x^p - \nu^p_n x^n = 0, \tag{6}$$

где $\lambda^0_v = -\frac{1}{r}\Lambda^p_{vp}$, $\nabla\lambda^0_v + \omega^0_v = \lambda^0_{v\sigma}\omega^\sigma_0$,

$$\nu^0_n = -\frac{1}{r}(\nu^p_{np} - \Lambda^n_{tp}\nu^t_n\nu^p_n), \; \nabla\nu^0_n + \nu^p_n\omega^0_p - \lambda^0_v\omega^v_n + \omega^0_n = \nu^0_{n\sigma}\omega^\sigma_0 .$$

Плоскость (6) является плоскостью Картана $C_{n-r-1}(\nu^p_n) \subset N_{n-r}(A_0)$ [5] Λ-подрасслоения в данном центре A_0. Отсюда следует, что поля геометрических объектов $\{\nu^p_n\}$ и $\{\nu^p_n, \lambda^0_v, \nu^0_n\}$ задают поле оснащающих плоскостей Картана $C_{n-r-1}(\nu^p_n)$ Λ-подрасслоения.

Заметим, что при выборе другого поля инвариантных нормалей 1-го рода $\{\overset{*}{\nu}{}^p_n\}$ Λ-подрасслоения уравнения плоскости Картана в данной точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ имеют вид

$$x^0 - \lambda^0_v x^v - \overset{*}{\nu}{}^0_n x^n = 0, \; x^p - \overset{*}{\nu}{}^p_n x^n = 0,$$

где $\overset{*}{\nu}{}^0_n = -\frac{1}{r}(\overset{*}{\nu}{}^p_{np} - \Lambda^n_{tp}\overset{*}{\nu}{}^t_n\overset{*}{\nu}{}^p_n)$, $\nabla\overset{*}{\nu}{}^0_n + \overset{*}{\nu}{}^p_n\omega^0_p - \lambda^0_v\omega^v_n + \omega^0_n = \overset{*}{\nu}{}^0_{n\sigma}\omega^\sigma_0$, то есть плоскость $\lambda_{n-r-2}(A_0) = [K_v] = [A_v + \lambda^0_v A_0]$ является осью оснащающих плоскостей Картана в нормалях 1-го рода N_{n-r} Λ-подрасслоения в данной точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$. В результате справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для пучка нормалей 1-го рода* $N_{n-r}(A_0)$ *плоскости* $\Lambda(A_0)$ *в данном центре* $A_0 \in \Omega_{n-1}$ *все плоскости Картана этого пучка проходят через неподвижную плоскость* $\lambda_{n-r-2}(A_0) = [K_v]$ *— ось пучка плоскостей Картана, которая определяется соотношениями:* $x^n = 0, x^p = 0$, $x^0 - \lambda_v^0 x^v = 0$.

Если охваты квазитензоров $\{\nu_n^v\}$ и $\{\nu_v^0\}$ представить в виде $\nu_n^v \overset{def}{=} \Lambda_n^v = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^v \Lambda_n^{pq}$, $\nabla\Lambda_n^v + \omega_n^v = \Lambda_{n\sigma}^v \omega_0^\sigma$ и $\nu_v^0 = \lambda_v^0$, то плоскость Картана

$$K_{n-r-1}(A_0) \overset{def}{=} \left[K_n(\nu), K_v = A_v + \lambda_v^0 A_0\right] \tag{7}$$

является плоскостью Кенигса [4], а точка

$$K_n(\nu_n^p) = \mu_n^0 A_0 + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v + A_n \tag{8}$$

есть точка Кенигса соответствующей нормали $\{\nu_n^p\}$, где

$$\mu_n^0 = \nu_n^0 + \lambda_v^0 \Lambda_n^v,\ \nabla\mu_n^0 + \nu_n^p \omega_p^0 + \Lambda_n^v \omega_v^0 + \omega_n^0 = \mu_{n\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Инвариантную плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ (7) и инвариантную точку K_n (8) будем называть соответственно $\nu\Lambda$-виртуальной плоскостью Кенигса и $\nu\Lambda$-виртуальной точкой Кенигса [2], так как их построение ассоциировано с Λ-подрасслоением и зависит от выбора поля нормалей 1-го рода $\{\nu_n^p\}$ Λ-подрасслоения.

Отметим, что точка K_n лежит на инвариантной прямой

$$\lambda_1(A_0) = [A_0; X_n] = \left[A_0; A_n + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v\right], \tag{9}$$

где $K_n = \mu_n^0 A_0 + X_n$, $\lambda_1(A_0) \subset N_{n-r}(A_0)$.

Резюмируя, приходим к следующему предложению.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности порядка t (t — порядок инвариантной нормали 1-го рода* $\{\nu_n^p\}$ *Λ-подрасслоения):*

1) поля геометрических объектов $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_n^p, \nu_n^0, \lambda_\nu^0\}$ *задают поле оснащающих плоскостей Картана* $C_{n-r-1}(\nu_n^p)$ *Λ-подрасслоения;*

2) поля геометрических объектов $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_n^p, \mu_n^0, \lambda_n^\nu\}$ *задают поле $\nu\Lambda$-виртуальных точек Кенигса* $K_n(\nu_n^p)$ *(8), которые лежат на соответствующих инвариантных прямых* λ_1 *(9);*

3) поля геометрических объектов $\{\nu_n^p\}$, $\{\lambda_\nu^0\}$, $\{\nu_n^p, \mu_n^0, \lambda_n^\nu\}$ *задают поле $\nu\Lambda$-виртуальных плоскостей Кенигса* $K_{n-r-1}(A_0)$ *(7).*

Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* Гиперповерхность проективного пространства, оснащенная распределениями // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 52—63.

2. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

5. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семинара по вект. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147—159.

N. Eliseeva

The invariant equipments of structure Λ -subbundles of hypersurface Ω_{n-1}

A hypersurface $\Omega_{n-1} \subset P_n$ with three strongest mutual subbundles is studied [1]. The invariant equipments of structure Λ -subbundles of hypersurface Ω_{n-1} are constructed.

Key words: hypersurface, distribution, Cartan plane, Kenigs plane, $\nu\Lambda$ -virtual plane of Kenigs, Kenigs point, $\nu\Lambda$ -virtual point of Kenigs.

УДК 514.75

М. В. Кретов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
blta@mail.ru

Комплексы однополостных гиперболоидов без фокальных многообразий

Продолжается исследование в трехмерном эквиаффинном пространстве комплексов (трехпараметрических семейств) однополостных гиперболоидов, у которых центр луча прямолинейной конгруэнции осей однополостного гиперболоида описывает линии с касательными, параллельными первому координатному вектору, а индикатрисы координатных векторов являются прямыми, параллельными этим векторам с пустым фокальным многообразием. Доказана теорема существования исследуемого многообразия. Геометрически охарактеризовано характеристическое многообразие образующего элемента рассматриваемого комплекса. Получены для него геометрические свойства.

Ключевые слова: комплекс, репер, однополостный гиперболоид, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, эквиаффинное пространство, индикатриса вектора, конгруэнция.
