3. *Douchin F., Haensel P.* Phys. Lett. 2000. № 107.
4. *Glendenning N.K., Moszkowski S.A.* Phys. Rev. Lett. 1991. № 67. P. 2414.
5. *Glendenning N.K., Schaffner-Bielich J.* Phys. Rev. Lett. 1998. № 81. P. 4564.
6. *Perlmutter S. et al.* Supernova Cosmology Project Collaboration. Astrophys. J. 1999. № 565.
7. *Riess A.G. et al.* Supernova Search Team Collaboration. Astron. J. 1998. № 116. P. 1009.
8. *Vidana I. et al.* Phys. Rev. C. 2000. № 62. P. 035801.

A. Baigashov, A. Astashenok

Compact objects in modified gravity

Alternatives to General Relativity have been developed in order to solve several shortcomings related to the ultraviolet and infrared behaviors of the gravitational field as formulated in the Einstein theory. In particular, Extended Theories of Gravity could successfully address the recently established phenomenon of the accelerated expansion of the universe.

УДК 513.82

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

О почти контактных метрических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли

Доказано, что гиперповерхности с типовым числом два 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли допускают почти контактную метрическую структуру, отличную от структур Сасаки и Кенмоцу.

Ключевые слова: келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, структура Сасаки, структура Кенмоцу, типовое число.

1. Шестимерные подмногообразия алгебры Кэли являются источником интересных и содержательных примеров почти эрмитовых структур. Такие структуры глубоко изучались с 60-х годов прошлого века известнейшим американским геометром Альфредом Греем, затем отечественным специалистом В. Ф. Кириченко и многими другими авторами. Например, в [1] В. Ф. Кириченко получил полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли, ставших предметом исследования данной работы. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Большое количество современных геометров из самых разных стран каждый год публикуют статьи в хороших журналах с результатами, полученными в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Отметим, что новый обзор [2] об эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли содержит множество самых разнообразных результатов.

2. Как известно [3], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$ [3].

Напомним [3; 4], что на всякой ориентируемой гиперповерхности N почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура, то есть система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на гиперповерхности N.

Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством

$$\nabla\eta=\nabla\Phi=0,$$

где ∇ — риманова связность метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ [3]. Также напомним, что типовым числом гиперповерхности риманова многообразия называют ранг ее второй квадратичной формы [5].

3. В работе [6] доказано, что типовое число всякой косимплектической гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли не превосходит единицы. В статье [7] этот результат был улучшен: показано, что условие быть не больше одного для типового числа гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы на этой гиперповерхности индуцировалась косимплектическая структура. Затем этот факт был обобщен для гиперповерхностей произвольных келеровых многообразий [8].

Теорема 1. *Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли имеют следующий вид:*

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\beta} \wedge \omega,$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - i\sigma^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta} \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega, \qquad (1)$$

$$d\omega = -2i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha} + i\sigma_{3\beta}\omega \wedge \omega^{\beta} - i\sigma^{\beta}_{3}\omega \wedge \omega_{\beta}.$$

Доказательство.

Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [9]:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \omega_{\beta} + \left(\sqrt{2}B^{\alpha 3}{}_{\beta} + i\sigma^{\alpha}_{\beta}\right)\omega^{\beta} \wedge \omega +$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_{3} + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_{\beta} \wedge \omega,$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + B_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\omega_{\gamma} \wedge \omega^{\beta} + \left(\sqrt{2}B_{\alpha 3}{}^{\beta} - i\sigma^{\beta}_{\alpha}\right)\omega_{\beta} \wedge \omega +$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^{3} - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^{\beta} \wedge \omega,$$

$$d\omega = \left(\sqrt{2}B^{3\alpha}{}_{\beta} - \sqrt{2}B_{3\beta}{}^{\alpha} - 2i\sigma^{\alpha}_{\beta}\right)\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha} + \left(B_{3\beta}{}^{3} + i\sigma_{3\beta}\right)\omega \wedge \omega^{\beta} +$$
$$+\left(B^{3\beta}{}_{3} - i\sigma^{\beta}_{3}\right)\omega \wedge \omega_{\beta},$$

где

$$B^{ab}{}_{c} = -\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},c},\; B_{ab}{}^{c} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}.$$

Здесь через $\{J^{j}_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\left\{B^{ab}{}_{c}\right\}$ и $\left\{B_{ab}{}^{c}\right\}$ служат компонентами виртуальных тензоров Кириченко [10] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь $\alpha,\beta,\gamma = 1, \ldots, n-1$; $a,b,c=1,\ldots,n$; $\hat{a}=a+n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в приближенно келерово многообразие M^{2n}.

Поскольку эрмитово многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда тензоры Кириченко обращаются в нуль [11], мы приходим к структурным уравнениям (1), ч. т. д.

Пусть типовое число гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли равно двум, то есть ранг матрицы (σ_{ps}) равен двум. Рассмотрим наиболее простые типы матриц (σ_{ps}) ранга два:

1.

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ p,s=1,2,3,4,5\,; \sigma_{11}\neq 0,\ \sigma_{\hat{1}\hat{1}}\neq 0\,.$$

Тогда структурные уравнения (1) примут следующий вид:

$$d\omega^1 = \omega^1_\beta \wedge \omega^\beta + \ \ i\sigma^{11}\omega_1 \wedge \omega\,,\ d\omega^2 = \omega^2_\beta \wedge \omega^\beta\,, \qquad (2)$$

$$d\omega_1 = -\omega^\beta_1 \wedge \omega_\beta - i\sigma_{11}\omega^1 \wedge \omega,\ \ d\omega_2 = -\omega^\beta_2 \wedge \omega_\beta,\ \ d\omega = 0\,.$$

2.

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_{1\hat{1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\hat{1}1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p,s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,; \sigma_{\hat{1}1}\neq 0, \sigma_{1\hat{1}}\neq 0\,.$$

Тогда структурные уравнения (1) примут вид

$$d\omega^1 = \omega^1_\beta \wedge \omega^\beta + i\sigma^1_1 \omega^1 \wedge \omega,\ d\omega^2 = \omega^2_\beta \wedge \omega^\beta, \qquad (3)$$

$$d\omega_1 = -\omega^\beta_1 \wedge \omega_\beta - i\sigma^1_1 \omega_1 \wedge \omega,\ d\omega_2 = -\omega^\beta_2 \wedge \omega_\beta,\ d\omega = -2i\sigma^1_1 \omega^1.$$

4. Сравним структурные уравнения (2) и (3) с уравнениями самых важных почти контактных метрических структур [3; 12]:

1. Косимплектическая структура:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta,\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta,\ d\omega = 0.$$

2. Сасакиева структура:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta - i\omega \wedge \omega^\alpha,\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + i\omega \wedge \omega_\alpha,$$

$$d\omega = -2i\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha.$$

3. Структура Кенмоцу:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha,\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha,\ d\omega = 0.$$

Хорошо видно, что ни (2), ни (3) не задают почти контактную метрическую структуру указанных видов. Разумеется, тот факт, что почти контактная метрическая структура на 2-гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав не может быть косимплектической, есть прямое следствие из упомянутых выше результатов [7; 8]. Новым является то, что такая структура отлична от структур Сасаки и Кенмоцу. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Гиперповерхности с типовым числом два 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли допускают почти контактную метрическую структуру, отличную от структур Сасаки и Кенмоцу.*

5. Отметим, что изучение структурных уравнений (2) и (3) позволит лишь установить неполные сведения о 2-гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. Вместе с тем характеризация почти контактной метрической структуры, задаваемой такими уравнениями, станет важнейшими первым шагом к исследованию 2-гиперповерхностей как 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли, так и произвольных келеровых многообразий.

Автор выражает искреннюю признательность Алигаджи Рабадановичу Рустанову за содержательные дискуссии о геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий.

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия вузов. Сер. : Математика. 1980. №8. С. 32—38.

2. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

3. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Степанова Л.В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина. 1995. С. 187—191.

5. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. Vol. 24. P. 127—132.

6. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Известия вузов. Сер. : Математика. 2003. №7. С. 59—63.

7. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Сер. : Математика. 2014. №10. С. 13—18.

8. *Banaru M.* Special Hermitian manifolds and the 1-cosymplectic hypersurfaces axiom // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2014. Vol. 90, №3. P. 504—509.

9. *Stepanova L. V., Banaru M. B.* On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds // Analele Stiintifice ale Universitatii «Al. I. Cuza». Iasi, 2001. T. 47, №1. P. 65—70.

10. *Abu-Saleem A., Banaru M.* Some applications of Kirichenko tensors // Analele Univ. Oradea, 2010. T. 17, №2. P. 201—208.

11. *Banaru M.* On the Gray-Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». Math., 2004. T. 95. P. 125—131.

12. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

M. Banaru

On almost contact metric hypersurfaces of 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra

It is proved that 2-hypersurfaces in 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra admit non-Sasaki and non-Kenmotsu almost contact metric structures.

УДК 514.76

К. В. Башашина

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

baschaschina@mail.ru

Редукция аффинной связности многообразия к фундаментально-групповой связности подмногообразия

В n-мерном гладком многообразии V_n задан объект аффинной связности способом Лаптева — Лумисте. Рассмотрено подмногообразие V_m, которое представлено как семейство меньшей размерности, описанное точкой многообразия V_n. В рас-