Dual normal connections on the centred tangential degenerate hyperstrip of the projective space are considered. It is shown, that four centerprojective connections and four centerprojective connection dual to above mentioned are induced on the generalized normalized hyperstrip in the generalized normals of the first kind bundle. Conditions of their coinsidence are cleared up.

УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

ДИОФАНТОВЫ СЕМЕЙСТВА ПИФАГОРОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрены подмножества прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон (пифагоровых треугольников), имеющих одинаковую гипотенузу. Такие подмножества называются диофантовыми, так как Диофант в 3-й книге «Арифметика» впервые нашел четыре пифагоровых треугольника с одинаковой гипотенузой ([1], с.112). Доказано, что диофантово семейство с гипотенузой $m_n=p_1p_2...p_n$, где p_i-последовательные простые числа вида 4k+1 ($k\in N$), состоит из $\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1}C_n^h$ пифагоровых треугольников. Указан метод нахождения таких семейств, и дана компьютерная программа Н.В.Малаховского определения диофантовых семейств для произвольного $n\in N$. Решена задача определения диофантова семейства с заданной гипотенузой $c\in N$.

§1. Базовая последовательность пифагоровых треугольников

Пифагоровы треугольники определяются диофантовыми формулами

$$(2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2), \tag{1.1}$$

где $m,n\in N$, $m>n$. Л.Эйлер доказал ([2], с.46-47), что всякое простое число $p=4k+1$, $k\in N$ единственным образом разлагается на сумму квадратов двух натуральных чисел: $p=m^2+n^2$. Следовательно, такое простое число определяет единственный пифагоров треугольник (1.1). Обозначим через p_i -i^e простое число 4k+1, т.е.

$$\begin{gathered} p_1=5,\ p_2=13,\ p_3=17,\ p_4=29,\ p_5=37,\ p_6=41,\ p_7=53,\ p_8=61,\\ p_9=73,\ p_{10}=89,\ p_{11}=97,\ p_{12}=101,\ p_{13}=109,\ p_{14}=113,\ p_{15}=137,... \end{gathered} \tag{12}$$

Последовательность пифагоровых треугольников с гипотенузами p_i ($i=1,2,...$) назовем базовой. Для $1\le i\le 45$ получаем:

(4,3,5), (12,5,13), (8,15,17), (20,21,29), (12,35,37), (40,9,41), (48,45,53), (60,11,61), (48,55,73), (80,39,89), (72,65,97), (20,99,101), (60, 91,109), (112,15,113), (88,105,137), (140,51,149), (132,85,157), (52,165,173),(180,19,181), (168,95,193), (28,195,197), (60,221,229), (208,105,233),(120,209,241), (32,255,257), (260,69,269), (252,115,277), (160,231,281), (68,285,293), (312,25,313), (308,75,317), (288,175,337), (180,299,349), (272,225,353), (252,275,373), (340,189,389), (228,325,397), (40,399,401), (120,391,409), (420,29,421), (408,145,433), (280,351,449), (168,425,457), (380,361,461), (220,459,509).

§2.Диофантовы семейства пифагоровых треугольников с гипотенузой $m_n=p_1p_2...p_n$

Рассмотрим диофантово семейство с гипотенузой $m_2=p_1p_2=5\cdot13=65$, т.е. задачу Диофанта. Имеем:

$$13\cdot(4,3,5)=(52,39,65),\ 5\cdot(12,5,13)=(60,25,65).$$

Так как $5=2^2+1^2$, $13=3^2+2^2$, то из тождеств

$$(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2=(m_1m_2-n_1n_2)^2+(m_1n_2+m_2n_1)^2 \quad (2.1)$$

следует: $65=8^2+1^2=4^2+7^2$. Используя формулы (1.1), получаем еще два пифагоровых треугольника с гипотенузой 65. Таким образом, диофантово семейство с гипотенузой 65 состоит из четырех пифагоровых треугольников:

$$(52,39,65),\ (60,25,65),\ (16,63,65),\ (56,33,65). \quad (2.2)$$

Разработанный Диофантом прием решения задачи для n=2 можно распространить на произвольное $n\in N$. Пусть гипотенуза диофантова семейства задается произведением n последовательных простых чисел вида $4k+1$, $k\in N$:

$$m_n=p_1p_2...p_n. \quad (2.3)$$

Множество пифагоровых треугольников с гипотенузой m_n разбивается на подмножества вида:

$$\{(a_1,b_1,m_n)\},\{p_i\cdot(a_2,b_2,p_1...p_{i-1}p_{i+1}...p_n)\},...,\{p_1p_2...\ p_{i-1}p_{i+1}...p_n\cdot(a_n,b_n,p_i)\}. \quad (2.4)$$

Учитывая, что произведение p_ip_j $(i\neq j)$, в силу тождеств (2.1), определяет два пифагоровых треугольника с гипотенузой p_ip_j, убеждаемся, что подмножества (2.4) содержат соответственно $2^{n-1}c_n^n$, $2^{n-2}\ c_n^{n-1}$,...,$2\ c_n^2$, $2^0c_n^1$ пифагоровых треугольников. Приходим к результату.

Теорема. *Существует*

$$h_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}c_n^k \qquad (2.5)$$

пифагоровых треугольников с общей гипотенузой $m_n=p_1p_2...p_n$.

В частности,

$$h_1=1,\ h_2=4,\ h_3=13,\ h_4=40,\ h_5=121, h_6=364,\ h_7=1093,\ h_8=3280. \qquad (2.6)$$

Диофантовы семейства с общей гипотенузой $m_3=5\cdot13\cdot17=1105$ состоят из 13 пифагоровых треугольников:

(884,663,1105), (1020,425,1105), (520,975,1105), (700,855,1105),
(1100,105,1105), (468,1001,1105), (1092,169,1105), (272,1071,1105), (2.7)
(952,561,1105),(264,1073,1105),(744,817,1105),(576,943,1105), (1104,47,1105).

Диофантово семейство с общей гипотенузой $m_4=5\cdot13\cdot17\cdot29=32045$ образует 40 пифагоровых треугольников:

(25636,19227, m_4), (29580,12325, m_4), (15080,28275, m_4), (22100,23205, m_4),
(7888,31059, m_4), (27608,16269, m_4), (13572,29029, m_4), (31668,4901, m_4),
(5304,31603, m_4), (31824,3757, m_4), (20300,24795, m_4), (31900,3045, m_4),
(31824,3757, m_4), (20300,24795, m_4), (31900,3045, m_4), (12920,29325, m_4),
(29920,11475, m_4), (8580,30875, m_4), (30420,10075, m_4), (31800,3955, m_4),
(2.8)
(2400,31955, m_4), (25200,19795, m_4), (21000,24205, m_4), (21576,23693, m_4),
(7556,31117, m_4), (32016,1363, m_4), (16704,27347, m_4), (27132,17051, m_4),
(15708,2793, m_4), (31212,7259, m_4), (8772,30821, m_4), (29848,11661, m_4),
(10192,30381, m_4), (19552,25389, m_4), (26312,18291, m_4), (716,32037, m_4),
(19552,25389, m_4), (26312,18291, m_4), (716,32037, m_4), (31964,2277, m_4),
(27004,17253, m_4), (15916,27813, m_4), (22244,23067, m_4), (24124,21093, m_4),
(30956,8283, m_4), (6764,31323, m_4).

§3. Компьютерная программа нахождения диофантовых семейств прямоугольных треугольников

Хотя диофантовы семейства (2.2), (2.7), (2.8) можно найти, используя только калькулятор, при n>4 вычисления оказываются слишком громоздкими. Н.В.Малаховский составил компьютерную программу, позволяющую для любого $n\in N$ найти диофантово семейство $h_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}c_n^k$ пифагоровых треугольников с общей гипотенузой $m_n=p_1p_2...p_n$. Эта программа составлена с использованием пакета программ Maple V Release 4.00 a.:

```
X: =[sed(4∗m+1,m=1...7)]:h:=0
Y:=select(isprime,X):Z:=mul(i,i=Y)
with(numtheory,sum2sqr):with(combinat,choose):
S:=seq(op([m[i]=op(2,op(1,sum2sqr(op(i,Y)))),n[i]=op(1,op(1,sum2sqr(op(i,Y0
000]), i=1..nops(Y)):i:=nops(Y):N:=[[m[op(1,op(k,M))],n[op(1,op(k,M))]]]:
for j while j,<=i
do seq([2∗op(1,op(i,N)) ∗op(2,op(i,N)),abs(op(1,op(i,N))^2-op(2,op(i,N))^2),
op(1,op(i,N))^2+op(2,op(i,N))^2],i=1..nops(N)):s[j]:=sabs(1=1,[′ ′]):
M:=choose(i,j):
for k while k<=nops(M)
do subs(S,s[j]):print(op(′ ′*Z/op(3,op(1, ′ ′)))):h:=h+nops(′ ′):
od:unassign(′ k′,′M′ ):N:=[seg(op([[op(1,op(i,N))*m(op(1+j,op(k,M))]+
op(2,op(i,N))*n[op(1+j,op(k,M))],abs(op(1,op(i,N))*n[op(1+j,op(k,M))]-
op(2,op(i,N))*m[op(1+j,op(k,M)])], [op(1,op(i,N))*n[op(1+j,op(k,M))]+
op(2,op(i,N))*m[op(1+j,op(k,M))],
abs(op(1,op(1,op(i,N)*m[op(1+j,op(k,M))]-
op(2,op(i,N))*n[op(1+j,op(k,M)])]]), i=1..nops(N))]:
od:h;
```

Кроме рассмотренных случаев n=2,3,4 с помощью этой программы составлены таблицы диофантовых семейств пифагоровых треугольников для n=5 (121 треугольник с гипотенузой m_5=1185665), n=6 (364 треугольника с гипотенузой m_6=486122265), n=7(1093 треугольника с гипотенузой m_7=2576450045), n=8 (3280 треугольников с гипотенузой m_8=157163452745).

§4. Подмножества пифагоровых треугольников с заданной гипотенузой

Пусть c – произвольное натуральное число, большее 4:

$$c=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\dots s_k^{\alpha_k}\ \ (c>4), \tag{4.1}$$

где s_i $(i=\overline{1,k})$ – попарно различные простые числа, а α_i – произвольные натуральные числа. Обозначим через H_c множество всех пифагоровых треугольников с гипотенузой c.

Так как простое число вида 4n+3 не разлагается на сумму квадратов двух натуральных чисел, то $H_c=\varnothing$, если все простые множители s_i $(i=\overline{1,k})$ имеют такой вид. Например, не существует ни одного пифагорова треугольника при c=7, c=11, c=19, c=31 и $c=7^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}\cdot 19^{\alpha_3}\cdot 31^{\alpha_4}$ $(\alpha_i\in N_0=N\cup 0)$.

Рассмотрим случай, когда среди простых множителей числа c есть хотя бы один вида 4n+1 ($n \in N$). Пусть s_i ($i=\overline{1,q}$) – все простые попарно различные множители гипотенузы c, имеющие такой вид. Для произведения $c^*=s_1 s_2 \ldots s_q$ находим диофантово семейство H_{c^*} пифагоровых треугольников с гипотенузой c^*. Пусть

$$c=\lambda\, c^*=\lambda\, s_1 s_2 \ldots s_q. \tag{4.2}$$

Тогда множество H_c всех пифагоровых треугольников с гипотенузой c определяется почленным умножением на множитель λ каждого треугольника семейства H_{c^*}. Следовательно, множество H_c состоит из $\sum_{k=1}^{q} 2^{k-1} c_q^k$ пифагоровых треугольников с гипотенузой c. Проиллюстрируем изложенное на следующем примере. Пусть

$$c=25380927=3^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37 \cdot 41. \tag{4.3}$$

Здесь $c^*=13 \cdot 37 \cdot 41=19721$, $\lambda=3^2 \cdot 11 \cdot 13=1287$. Находим 13 пифагоровых треугольников семейства H_{c^*}. Используя те же приемы, которыми определялись в §2 пифагоровы треугольники с общей гипотенузой $m_3=5 \cdot 13 \cdot 17$:

$(9520,17271, c^*)$, $(1600,11529, c^*)$, $(3080,19479, c^*)$, $(5560,18921, c^*)$,
$(14760,13079, c^*)$, $(19680,1271, c^*)$, $(4144,19425, c^*)$, $(11396,16095, c^*)$,
$(19604,2145, c^*)$, $(16796,10335, c^*)$, $(19240,4329, c^*)$, $(6396,18655, c^*)$,
$(18204,7585, c^*)$.

Умножая почленно каждую пифагорову тройку на множитель $\lambda=1287$, получим искомые 13 пифагоровых треугольников с одинаковой гипотенузой c=25380927, определяющих семейство H_c:

(12252240,22227777,c), (20592000, 14837823,c), (3963960,25069473,c),
(7155720,24351327,c), (18996120,16832673,c), (25328160,1635777,c),
(5333328,24999975,c), (14666652,20714265,c), (25230348,2760615,c),
(21616452,13301145,c), (24761880,5571423,c), (8231652,24008985,c),
(23428548,9761895,c).

Список литературы

1. *Даан-Дальмедико А., Ж.Пейффер*. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. М.: Мир, 1986. 432 с.

2. *Малаховский В.С.* Эти загадочные простые числа. Калининград: Янтарный сказ, 1998. 54 с.

3. *Оре О*. Приглашение в теорию чисел. М.: Наука, 1980. 128 с.

S. Malakhovsky

DIOPHANTINE FAMILIES OF PIFAGOR TRIANGLES

We consider subsets of right-angled triangles with integer length of sides – Pifagor's triangles, having same hypotenuse. Such subsets are called Diophantine ones. It is proved, that Diophantine family with hypotenuse $m_n=p_1p_2...p_n$, where p_i – consecutive prime number of the kind 4k+1 ($k\in N$), consists of $\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1}C_n^h$ Pifagor's triangles. The method for finding of the families is indicated and N.V. Malakhovsky computer program is given.

УДК 514.75

Н.В. Малаховский

(*Калининградский государственный университет)*

СЕМЕЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПОНСЕЛЕ

На комплексной плоскости *C* рассматривается двухпараметрическое семейство Π_2 треугольников с заданными радиусами *R* и *r* ($R>r$) описанной и вписанной окружностей и центром *O* описанной окружности. Центры L_0 вписанных окружностей этого семейства располагаются, в силу формулы Эйлера

$$d^2=R^2-2Rr, \tag{1}$$

на окружности (O,d). Фиксацией центра $I_0 \in(O,d)$ выделяется однопараметрическое подсемейство $\Pi_1\subset\Pi_2$, называемое семейством Понселе. Каждый треугольник этого семейства имеет описанную окружность (O,R) и вписанную окружность $(I_0,r),OI_0=d$. Известно, что задание треугольника *ABC* порождает ряд инвариантных точек и линий в плоскости этого треугольника. В работе установлены связи между ними, когда треугольник *ABC* описывает семейство Понселе, и дана геометрическая характеристика полученных зависимостей.

Примем окружность (O,R) за единичную $|z|=1$ и обозначим через a^2,b^2,c^2 комплексные координаты вершин произвольного треугольника *ABC* семейства Понселе. Тогда координата центра I_0 его вписанной окружности примет вид: