3. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: Учебное пособие. Калининград, 1983. 82 с.

4. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С. 7-70.

5. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван, 1990. 116 с.

6. *Атанасян Л.С.* Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. М., 1952. Вып. 9. С. 351-410.

Iu.I. P o p o v

NORMAL AFFINE CONNECTION OF EQUIPPED HYPERSTRIP OF AFFINE SPACE

An interior affine connection γ and a normal centroaffine connection $\gamma^{\perp}$ are introduced for the equipped regular hyperstrip $\mathcal{H}_m$ of the affine space A_{n+1} in the tangent fibering $T(V_m)$ and in the normal fibering $N(V_m)$ respectively. A normal characteristic centroaffine connection $\eta^{\perp}$ in fiber bundles $\chi(V_m)$ of characteristic χ_x of the hyperstrip $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ and also a normal centroaffine connection $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$, induced by the fibering $l(V_m)$ of equipping lines l_x, where $l_x \subset N_x$, $x \in V_m$, are considered.

It is shown that trivial, axial and central axial equipment of the regular hyperstrip $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ induce a plane connection in the corresponding fibering. It is determined, for example, that the normal centroaffine connection $\gamma^{\perp}$ of a spherical strip is plane and the interior affine connection γ is locally affine.

УДК 514.75

НОРМАЛЬНАЯ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ ГИПЕРПОЛОСЫ CH_m^r ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Т.Ю. П о п о в а

(Калининградское ВВМУ)

Введены в рассмотрение касательное расслоение $T(V_r)$ и нормальное расслоение $N(V_r)$, ассоциированные с нормализованной по Нордену гиперполосой $CH_m^r \subset P_n$. Доказано, что в этих расслоениях соответственно индуцируются центроаффинная связность ∇ и центропроективная связность $\nabla^{\perp}$. Показано, что если нормали 1-го рода обобщенной нормализации гиперполосы CH^r_m образуют осевое оснащение, а нормали 2-го рода образуют гармоническую псевдоконгруэнцию, то связность $\nabla^{\perp}$ является плоской. Выяснено, что ряд подрасслоений, ассоциированных с гиперполосой CH^r_m, являются параллельными подрасслоениями нормального расслоения $N(V_r)$.

Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$$\overline{J},\ \overline{Y}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0,n};\ J,Y,K,L=\overline{1,n};\ p,q,r,s,t=\overline{1.r};\ a,b,c,d=\overline{r+1,n}.$$

$$i,j,k,l=\overline{r+1,m};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n+1};\ u,\upsilon,w=\overline{r+1,n-1};$$

1. Рассмотрим нормализованную в смысле Нордена центрированную тангенциально вырожденную гиперполосу CH^r_m в проективном пространстве P_n. Поле обобщенных нормалей 1-го рода ☠$_{r-1}$ гиперполосы CH^r_m образует нормальное расслоение $N(V_r)$ на поверхности V_r [1].. Множество касательных плоскостей T_r поверхности V_r, оснащенных нормалями 2-го рода ☠$_{r-1} \overset{def}{=} \nu_x$, образует касательное центроаффинное расслоение $T(V_r)$[1]. При этом r-параметрическое семейство нормалей 2-го рода ν_x является псевдоконгруэнцией в P_n. Отметим, что поле плоских образующих E_S , базисной поверхности V^r_m гиперполосы CH^r_m определяет подрасслоение $E^S(V_r)$, поле характеристик χ_x гиперполосы CH^r_m является нормальным подрасслоением $\chi(V_r)$, поле нормалей 1-го рода поверхности V^r_m есть нормальное расслоение $N^{n-m}(V_r)$, поле плоскостей $E_{n-m-1}=N_{n-m} \cap \chi_x$ образует нормальное подрасслоение $N^{n-m-1}(V_r)$.

Уравнения инфинитезимального перемещения точечного репера $\{A_{\overline{J}}\}$ проективного пространства имеют вид:

$$dA_{\overline{J}} = \theta^o_o A_{\overline{J}} + \omega^{\overline{K}}_{\overline{J}} A_{\overline{K}},$$

причем формы $\omega^{\overline{K}}_{\overline{J}}$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega^{\overline{K}}_{\overline{J}} = \omega^{\overline{L}}_{\overline{J}} \wedge \omega^{\overline{K}}_{\overline{L}} - \delta^{\overline{K}}_{\overline{J}} (\omega^L_o \wedge \omega^o_L). \tag{1.1}$$

В репере $\{A_{\overline{J}}\}$ 1-го порядка гиперполоса CH^r_m задается уравнениями [2]:

$$\begin{aligned} &\omega^a_o = 0,\ \ \omega^\alpha_i = 0,\ \ \omega^\upsilon_p = a^\upsilon_{pq}\omega^q,\ \omega^p_\upsilon = c^p_{\upsilon q}\omega^q, \\ &\omega^n_\upsilon = 0,\ \ \ \omega^n_p = a^n_{pq}\omega^q,\ \ \ \omega^b_p = a^b_{pq}\omega^q, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$a^n_{[pq]} = 0,\ \ a^\upsilon_{[pq]} = 0,\ \ c^p_{\upsilon[q} a^n_{t]p} = 0,\ \ c^p_{i[q} a^{\alpha.}_{t]p} = 0. \tag{1.3}$$

Проведем частичную канонизацию репера: вершины $\{A_p\}$ поместим в обобщенную нормаль 2-го рода $\aleph_{r-1}(A_o)$, а точку A_n -в нормаль $E_{n-m}(A_o)$ 1-го рода гиперполосы CH_m^r. Тогда имеем

$$\begin{cases} \omega_a^p = c_{aq}^p \omega^q, \quad \omega_p^o = h_{pq}\omega^q, \\ \omega_n^\upsilon = c_{nq}^\upsilon \omega^q, \quad \omega_\alpha^i = c_{\alpha q}^i \omega^q, \omega_a^o = h_{aq}\omega^q. \end{cases} \tag{1.4}$$

Такой репер R^1 называется репером адаптированным с нормализованной гиперполосой CH_m^r. Таким образом, уравнения (1.2)-(1.4) являются дифференциальными уравнениями нормализованной по Нордену гиперполосы CH_m^r в адаптированном репере R^1.

Теорема 1. В касательном расслоениии $T(V_r)$ и в нормальном расслоении $N(V_r)$, ассоциированных с нормализованной по Нордену гиперполосой CH_m^r, определяются соответственно центроаффинная связность ∇ без кручения и нормальная центропроективная связность $\nabla^\perp$.

Действительно, с учетом (1.1)-(1.4) структурные уравнения касательного центроаффинного расслоения $T(V_r)$ принимают вид:

$$d\omega^p = \omega^q \wedge \omega_q^p; \quad d\omega_q^p = \omega_q^t \wedge \omega_t^p + \Omega_q^p, \tag{1.5}$$

где

$$\Omega_q^p = \omega_q^\upsilon \wedge \omega_\upsilon^p + \omega_q^o \wedge \omega_o^p - \delta_q^p(\omega_o^t \wedge \omega_t^o) = R_{qst}^p \omega^s \wedge \omega^t, \tag{1.6}$$

$$R_{qst}^p = a_{q[s}^b c_{|b|t]}^p + h_{q[s}\delta_{t]}^p - \delta_q^p h_{[st]}. \tag{1.7}$$

Из (1.6) в силу теоремы Картана-Лаптева [3] вытекает, что в касательном расслоении $T(V_r)$ поверхности V_r, нормализованной по Нордену, определяется аффинная связность ∇ без кручения. Впервые эту связность ввел и подробно исследовал Норден в работе [4]. Формы ω_q^p есть формы связности ∇, а формы Ω_q^p - ее формы кривизны.

В силу (1.1)-(1.4) для нормального расслоения $N(V_r)$ поверхности V_r имеем:

$$d\omega^p = \omega^q \wedge \omega_q^p, \quad d\omega_a^o = \omega_a^b \wedge \omega_b^o + \Omega_a^o, \quad d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b + \Omega_a^b, \tag{1.8}$$

где

$$\Omega_a^o = \omega_a^p \wedge \omega_p^o = T_{ast}\omega^s \wedge \omega^t, \quad \Omega_a^b = \omega_a^p \wedge \omega_p^o - \delta_a^b(\omega_o^p \wedge \omega_p^o), \tag{1.9}$$

$$T_{ast} = c_{a[s}^p h_{|p|t]}, \quad R_{ast}^c = c_{a[s}^p a_{|p|t]}^c - \delta_a^c h_{[st]}. \tag{1.10}$$

Из (1.9) вытекает, что формы Ω_a^o, Ω_a^b являются полубазовыми [3]. Поэтому в силу теоремы Картана-Лаптева , формы ω_a^o, ω_a^b определяют центропроективную связность $\nabla^\perp$ в нормальном расслоении $N(V_r)$, а формы $\{\Omega_a^b, \Omega_a^o\}$ являются формами кривизны [3].

Аналитическими условиями инвариантности системы форм кривизны $\{\Omega_a^b, \Omega_a^o\}$ являются тождества Биянки, которые получаются внешним дифференцированием (1.9):

$$d\Omega_a^o = -\Omega_a^b \wedge \omega_b^o + \omega_a^b \wedge \Omega_b^o, \quad d\Omega_b^a = -\Omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega_b^c \wedge \Omega_c^q. \qquad (1.11)$$

Формы ω_b^a в силу (1.8) определяют связность $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$ в расслоении нормальных направлений $N^*(V_r)$ [1].

Дифференцируя уравнения $\omega_p^a = b_{pq}^a \omega^q$, находим

$$\overline{\nabla} b_{pq}^a = b_{pqs}^a \omega^s. \qquad (1.12)$$

Это означает, что b_{pq}^a является смешанным тензором на V_r, который называется вторым фундаментальным тензором гиперполосы CH_m^r. Продолжая уравнения $\omega_a^p = c_{aq}^p \omega^q$, $\omega_p^o = h_{pq}\omega^q$, получим

$$\overline{\nabla} c_{aq}^p - \omega_a^o \delta_q^p = c_{aqt}^p \omega^t, \quad \overline{\nabla} h_{pq} + a_{pq}^c \omega_c^o = h_{pq} + \omega^t. \qquad (1.13)$$

Объект

$$\tilde{c}_{aq}^p = c_{aq}^p - c_a \delta_q^p, \qquad (1.14)$$

где $c_a = \frac{1}{r} c_{ap}^p$ является тензором и его компоненты удовлетворяют уравнениям $\overline{\nabla} \tilde{c}_{aq}^p = \tilde{c}_{aqt}^p \omega^t$.

Компоненты (1.10) тензора кривизны центропроективной связности $\nabla^{\perp}$ нормального расслоения $N(V_r)$ с учетом (1.14) можно представить в виде

$$T_{ast} = \tilde{c}_{a[s}^p h_{|p|t]} + c_a h_{st]}, \quad R_{ast}^b = \tilde{c}_{a[s}^p a_{|p|t]}^b - \delta_a^b h_{[st]}. \qquad (1.15)$$

2. Как показал А.В.Чакмазян [1] существует класс нормализованных подмногообразий $M_m \subset P_n$, у которых связность в нормальном расслоении является плоской. Аналогичная теорема имеет место и для гиперполос $CH_m^r \subset P_n$.

Теорема 2. Если r-сопряженная система V_r в P_n нормализована сопряженно-гармонически, то связность $\nabla^{\perp}$, определяемая этой нормализацией в нормальном расслоении $N(V_r)$, является плоской.

Теорема 3. Осевая гармоническая нормализация подмногообразия V_r в P_n индуцирует в нормальном расслоении $N(V_r)$ плоскую нормальную связность, а в касательном расслоении $T(V_r)$ эквиаффинную связность.

Доказательство проведем аналогично работе[1, §5].

Пусть $E_{n-r-1}=[B_a]=[\lambda_a A_o + A_a]$-ось пучка обобщенных нормалей 1-го рода гиперполосы CH_m^r. Из условия неподвижности плоскости E_{n-r-1} получим:

$$\lambda_a \omega^p + \omega_a^p = 0; \quad d\lambda_a + \omega_a^o - \omega_a^b \lambda_b = 0. \qquad (1,16)$$

Из (1.16) с учетом (1.4) находим

$$c^p_{aq} = -\lambda_a \delta^p_q. \qquad (1.17)$$

Учитывая соотношения (1.17) в формулах (1.10), приходим к выводу, что $T_{ast}=0$, $R^b_{ast}=0$, т.е. нормальная связность $\nabla^\perp$ плоская. Теперь с помощью (1.17) преобразуем (1.7):

$$T^p_{qst} = a^b_{q[s} c^p_{|b|t]} + h_{q[s} \delta^p_{t]}.$$

Следовательно, тензор Риччи имеет такой вид:

$$R_{qs} = (1-r)(a^b_{qs}\lambda_b - h_{qs}).$$

Откуда получим $R_{[qs]}=0$. Это означает, что связность ∇ в касательном расслоении $T(V_r)$ эквиаффинна [4].

В силу теорем 1 и 2 работы А.В.Чакмазяна [1,§8] для гиперполосы CH^r_m вытекают следующие предложения.

Теорема 4. Поле плоских образующих E_S тангенциально вырожденной поверхности V^r_m гиперполосы CH^r_m является параллельным полем s-мерных направлений, т.е. параллельным нормальным подрасслоением $N^S(V_r)$.

Теорема 5. Поле характеристик χ_x гиперполосы CH^r_m образует параллельное поле (n-r-1)-мерных нормальных направлений, т.е. нормальное параллельное подрасслоение $N^{n-r-1}(V_r)$.

Теорема 6. Поле плоскостей E_{n-m-1}, ассоциированное с гиперполосой CH^r_m образует параллельное поле (n-m-1)-мерных нормальных направлений, т.е. нормальное параллельное подрасслоение $N^{n-m-1}(V_r)$.

Библиографический список

1. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван, 1990. 116 с.

2. *Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы CH^r_m ранга r проективного пространства P_n. Калининград, 1997. 45 с. Деп в ВИНИТИ, №197-В97.

3. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

T.Yu. P o p o v a

NORMAL CENTROPROJECTIVE CONNECTION OF HYPERSTRIP CH^r_m OF PROJECTIVE SPACE

Tangent fibering $T(V_r)$ and normal fibering $N(V_r)$ are introoduced, associated with normalized by Norden hiperstrip $CH_m^r \subset P_n$. It is proved that in there fiberings centroaffine connectuon ∇ and centroprojective connection $\nabla^{\perp}$ are induced respectively. It is shown, that if normals of the 1st -genus of generalized normalization of hyperstrip CH_m^r form the axial equipment, and normals of the 2nd-genus form harmonic pseudocongruence, than connection $\nabla^{\perp}$ is plane. It is cleared up, that a series of subfiberings, associated with hiperstrip CH_m^r are parallel subfibering of normal fibering $N(V_r)$.

УДК 514.75

СИММЕТРИЧНЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ

О.С. Р е д о з у б о в а

(Московский педагогический государственный университет)

В данной работе объединены результаты, полученные в разные годы по теории симметричных пар Т конгруэнций.

В евклидовом трехмерном пространстве рассматриваются пары Т конгруэнций $\{r_a\}$ (a=1,2), связанные с конгруэнцией их общих перпендикуляров $\{r\}$. Прямая r пересекает соответствующие прямые пары Т конгруэнций в точках K_a. Вершина подвижного ортонормированного репера $R=(O,\vec{e}_i)$ (i,j=1,2,3) помещается на прямой r, вектор $\vec{e}_3 \| r$; α_a углы, образуемые прямыми r_a с вектором $\vec{e}_1$, ρ_a, ρ'_a - абсциссы фокусов конгруэнций $\{r_a\}$ относительно репера $(K_a,\vec{\eta}_a)$, где $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$ - направляющие орты прямых r_a. Координаты точек K_a в репере $(O,\vec{e}_3)$ равны h_a. Компоненты инфинитезимальных перемещений репера R: ω^i, ω_i^j удовлетворяют условиям

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i,\ \ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j.$$

Условия, определяющие пары Т конгруэнций, можно записать в виде [1,c.139] :

$$\begin{aligned}&\rho_1H_2+\Omega_{23}\tfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}-\rho_2A_2+Q_2=0,\quad \rho_1A_1-\Omega_{13}\tfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}-\rho_2H_1-Q_1=0,\\ &\rho'_1H_2+\Omega_{23}\tfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2}-\rho'_2A_2+Q_2=0,\quad \rho'_1A_1-\Omega_{13}\tfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2}-\rho'_2H_1-Q_1=0.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\Omega_a=\omega^1\cos\alpha_a+\omega^2\sin\alpha_a,\ \ \Omega_a^*=\omega^1\sin\alpha_a-\omega^2\cos\alpha_a,$$

$$\Omega_{a3}=\omega_1^3\cos\alpha_a+\omega_2^3\sin\alpha_a,\ \ \Omega_{a3}^*=-\omega_1^3\sin\alpha_a+\omega_2^3\cos\alpha_a,$$