

стве // Тр. геометрич. семинара / ВИНТИ АН СССР. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.

4. Малаховский В. С. Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве // Там же. С. 319—334.

N. Vinogradova, O. Vorotnikova, M. Kretov

ABOUT ONE COMPLEX OF ELLIPSOIDS IN AFFINE SPACE

In three-dimensional affine space research of complexes (three-parametric families) of ellipsoids proceeds. Geometrical properties of one of subclasses of considered diversity of figures are obtained.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

*(Балтийский военно-морской институт им. Ф. Ф. Ушакова,
г. Калининград)*

НОРМАЛИЗАЦИЯ НОРДЕНА — ТИМОФЕЕВА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано задание гиперполосы SH_m в репере 1-го порядка, и доказана теорема существования [1]. Для гиперполосы SH_m внутренним образом присоединены: а) в дифференциальной окрестности 2-го порядка ее нормализация в смысле Нордена — Тимофеева; б) в дифференциальной окрестности 3-го порядка однопараметрический пучок ее оснащений в смысле Э. Картана.

Ключевые слова: регулярная гиперполоса, нормализация, фокальное многообразие, линейная поляра, квазитензор, оснащение.

1. Схема использования индексов такова:

$J, K, L = \overline{1, n}; \quad \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}; \quad p, q, t = \overline{1, r}; \quad a, b, c = \overline{r+1, m};$

$i, j, k = \overline{1, m}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}; \quad s = m-r; \quad i = \{a, p\}; \quad \bar{\alpha} = \{\alpha, n\}.$

2. При операции дифференцирования используется оператор:

$$\nabla H_{\bar{K}}^{\bar{J}} = dH_{\bar{K}}^{\bar{J}} + H_{\bar{K}}^{\bar{L}} \omega_{\bar{L}}^{\bar{J}} - H_{\bar{L}}^{\bar{J}} \omega_{\bar{K}}^{\bar{L}}.$$

3. $[A, L]$ — плоскость, которая является линейной оболочкой плоскостей A и L .

§ 1. Задание гиперполосы SH_m

В проективном пространстве P_n рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [2], базисная поверхность которой несет двухкомпонентную неприводимую сопряженную систему [3]. Это означает, что:

а) в каждой точке A базисной поверхности V_m существует пара сопряженных направлений (плоскостей) $L_r(A) \stackrel{def}{=} L(A)$ и $L_{m-r}(A) \stackrel{def}{=} L(A)$, линейная оболочка которых совпадает с касательной плоскостью $T_m(A)$ поверхности V_m ;

б) направления $L(A)$ и $L(A)$ не содержат полных сопряженных подсистем или асимптотических направлений, причем $p > 1, \quad a > 1$ [3].

Итак, в каждой точке $A \in V_m$ выполняются соотношения

$$L(A) \cap L(A) = A, \quad [L(A), L(A)] = T_m(A). \quad (1.1)$$

Регулярные гиперполосы $H_m \subset P_n$, удовлетворяющие условиям (1.1), обозначим символом SH_m .

Присоединим к текущей точке $A \in V_m$ проективный точечный репер $\{A_j\}$ следующим образом: $A_o \equiv A, \quad \{A_a\} \subset L(A_o), \quad \{A_p\} \subset L(A_o), \quad \{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}$, где $X_{n-m-1}(A)$ — характеристика гиперполосы SH_m [2], точка A_n пусть занимает произвольное положение и $A_n \notin H(A)$. Репер $\{A_j\}$ является репе-

ром 1-го порядка гиперполосы SH_m . Так как точки $\{A_p\}$ и $\{A_a\}$ репера лежат в касательной плоскости $T_m(A)$ поверхности V_m , то

$$\omega_0^n = 0, \quad \omega_0^\alpha = 0. \quad (1.2)$$

Дифференцируя уравнения (1.2) внешним образом и развертывая полученные соотношения по базисным формам ω^i , найдем

$$\omega_p^{\hat{\alpha}} = A_{pq}^{\hat{\alpha}} \omega_0^q + A_{pb}^{\hat{\alpha}} \omega_0^b, \quad \omega_a^{\hat{\alpha}} = A_{aq}^{\hat{\alpha}} \omega_0^q + A_{ab}^{\hat{\alpha}} \omega_0^b, \quad (1.3)$$

где $A_{[pq]l}^{\hat{\alpha}} = 0$, $A_{pa}^{\hat{\alpha}} = A_{ap}^{\hat{\alpha}}$, $A_{[ab]l}^{\hat{\alpha}} = 0$.

Асимптотические квадратичные формы поверхности V_m принимают вид:

$$\varphi^{\hat{\alpha}} = A_{pq}^{\hat{\alpha}} \omega^p \omega^q + 2A_{pa}^{\hat{\alpha}} \omega^p \omega^a + A_{ab}^{\hat{\alpha}} \omega^a \omega^b.$$

Поскольку направления $L(A_0)$ и $L(A_0)$ сопряжены на поверхности, то члены, содержащие произведения $\omega^p \omega^a$ в формах $\varphi^{\hat{\alpha}}$, должны отсутствовать. Значит, условия сопряженности этих направлений принимают вид:

$$A_{pa}^{\hat{\alpha}} = A_{ap}^{\hat{\alpha}} = 0. \quad (1.4)$$

Из (1.3, 1.4) следует, что

$$\omega_p^{\hat{\alpha}} = A_{pa}^{\hat{\alpha}} \omega_0^a, \quad \omega_a^{\hat{\alpha}} = A_{ab}^{\hat{\alpha}} \omega_0^b. \quad (1.5)$$

Отметим, что для гиперполосы

$$\omega_\alpha^n = 0, \quad (1.6)$$

так как точки $\{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}(A_0)$ [2].

При фиксации точки $A_o \in V_m$ плоскости $L(A_0)$, $L(A_0)$ и $X_{n-m-1}(A_o)$ неподвижны. Следовательно, формы $\omega_p^{\hat{\alpha}}$, $\omega_a^{\hat{\alpha}}$, ω_p^a , ω_a^a , ω_α^p являются главными формами гиперполосы SH_m . Разложив главные формы по базисным $\omega^i = \{\omega^p; \omega^a\}$ и учитывая равенства (1.5), получим:

$$\begin{aligned} \omega_p^n &= A_{pq}^n \omega_0^q, & \omega_p^\alpha &= A_{pq}^\alpha \omega_0^q, & \omega_a^n &= A_{ab}^n \omega_0^b, & \omega_a^\alpha &= A_{ab}^\alpha \omega_0^b, \\ \omega_p^a &= A_{pi}^a \omega_0^i, & \omega_a^p &= A_{ai}^p \omega_0^i, & \omega_\alpha^p &= A_{ai}^p \omega_0^i, & \omega_\alpha^a &= A_{ai}^a \omega_0^i. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Замыкая уравнения (1.2, 1.6, 1.7) с учетом соотношений (1.4—1.7) и применяя лемму Картана, получим:

$$\begin{aligned} \nabla A_{pq}^n + A_{pq}^n \omega_0^0 &= A_{pqi}^n \omega_0^i, & \nabla A_{ab}^n + A_{ab}^n \omega_0^0 &= A_{abi}^n \omega_0^i, \\ \nabla A_{pq}^\alpha + A_{pq}^\alpha \omega_0^0 + A_{pq}^n \omega_n^\alpha &= A_{pqi}^\alpha \omega_0^i, & \nabla A_{ab}^\alpha + A_{ab}^\alpha \omega_0^0 + A_{ab}^n \omega_n^\alpha &= A_{abi}^\alpha \omega_0^i, \\ \nabla A_{pq}^a + A_{pq}^a \omega_0^0 + A_{pq}^n \omega_n^a &= A_{pqi}^a \omega_0^i, & \nabla A_{pb}^a + A_{pb}^a \omega_0^0 - \delta_b^a \omega_p^0 &= A_{pbi}^a \omega_0^i, \\ \nabla A_{ab}^p + A_{ab}^p \omega_0^0 - A_{ab}^n \omega_n^p &= A_{abi}^p \omega_0^i, & \nabla A_{aq}^p + A_{aq}^p \omega_0^0 - \delta_q^p \omega_a^0 &= A_{aqi}^p \omega_0^i, \\ \nabla A_{aq}^p + A_{aq}^p \omega_0^0 - \delta_q^p \omega_a^0 &= A_{aqi}^p \omega_0^i, & \nabla A_{ab}^p + A_{ab}^p \omega_0^0 &= A_{abi}^p \omega_0^i, \\ \nabla A_{ap}^a + A_{ap}^a \omega_0^0 &= A_{api}^a \omega_0^i, & \nabla A_{ab}^a + A_{ab}^a \omega_0^0 - \delta_b^a \omega_a^0 &= A_{abi}^a \omega_0^i, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{[pq]}^{\hat{a}} &= 0, & A_{[ab]}^{\hat{a}} &= 0, & A_{\alpha[p}^t A_{|t|q]}^n &= 0, \\ A_{c[fa} A_{|c|b]}^n &= 0, & A_{ap}^a A_{ab}^n &= A_{ab}^t A_{tp}^n, \\ A_{pt}^n A_{[ab]}^t + A_{c[fa} A_{|p|b]}^c &= 0, & A_{ac}^n A_{[pq]}^c + A_{t[pa} A_{|a|q]}^t &= 0, \\ A_{c[fa} A_{|p|b]}^c + A_{pt}^a A_{[ab]}^t &= 0, & A_{ac}^a A_{[pq]}^c + A_{t[pa} A_{|a|q]}^t &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

причем функции $A_{pqt}^{\hat{a}}$, $A_{abc}^{\hat{a}}$ симметричны по всем нижним индексам. Итак, гиперполоса SH_m задается в дифференциальной окрестности 2-го порядка уравнениями (1.2, 1.6—1.8) и соотношениями (1.9).

Геометрические объекты $\Gamma_1 = \{ A_{pq}^{\hat{a}}, A_{ab}^{\hat{a}}, A_{pi}^a, A_{ai}^p \}$, $\Gamma_2 = \{ \Gamma_1, A_{ai}^p, A_{ai}^a, A_{abi}^{\hat{a}}, A_{pij}^a, A_{aij}^p \}$ являются фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядков гиперполосы SH_m . Имеет место теорема существования гиперполосы SH_m .

Теорема 1. *Регулярная гиперполоса SH_m существует и определяется с произволом $2rs+m(n-m-1)$ функций m аргументов.*

§ 2. Нормализация Нордена — Тимофеева гиперполосы SH_m

1. Пусть гиперполоса SH_m оснащена в смысле Нордена — Чакамзяна [1], т. е. $X_{n-m-1}(A) \subset N_{n-m}(A_o)$. Точку A_n репера R^l поместим в нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A_o)$, тогда формы ω_n^i станут главными:

$$\omega_n^a = A_{ni}^a \omega^i, \quad \omega_n^p = A_{ni}^p \omega^i. \quad (2.1)$$

Отметим, что функции A_{ni}^a, A_{ni}^p определены в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Такой репер R^l назовем репером $R^l(N)$. Поле нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A_o)$ (поле N -плоскостей) и поле L -плоскостей определяют на базисной поверхности V_m поле $(n-s)$ -плоскостей $\Psi_{n-s}(A_o)$, так как в каждой точке $A_o \in V_m$: $[N_{n-m}(A_o), L(A_o)] = \Psi_{n-s}(A_o)$. Относительно репера $R^l(N)$ конечные уравнения плоскости $\Psi_{n-s}(A_o)$ имеют вид:

$$x^a = 0. \quad (2.2)$$

Используя (2.1, 2.2), а также формулы [4, § 2, с. 58]

$$\tilde{x}^{\bar{J}} = x^{\bar{J}} - x^{\bar{K}} \omega_{\bar{K}}^{\bar{J}} + \dots,$$

найдем фокальное многообразие в плоскости $\Psi_{n-s}(A_o)$, соответствующее смещениям точки A_o по кривым, принадлежащим L -плоскости:

$$x^a = 0, \quad \det \left\| \delta_b^a x^o + A_{pb}^a x^p + A_{cb}^a x^c + A_{nb}^a x^n \right\| = 0. \quad (2.3)$$

В общем случае мы получаем алгебраическое многообразие (2.3) размерности $(n-s-1)$ порядка s , которое обозначим $\Psi_{n-s-1}(\Psi, L)$. Соответствующая L -плоскость пересекает многообразие (2.3) по алгебраическому многообразию $\psi_{r-1}(A; L)$ того же порядка s размерности $(r-1)$:

$$x^a = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0, \quad \det \left\| \delta_b^a x^o + A_{pb}^a x^p \right\| = 0. \quad (2.4)$$

Линейная поляра точки A_o относительно фокального многообразия (2.4) задается уравнениями:

$$x^o - \lambda_p^o x^p = 0, \quad x^a = 0, \quad x^\alpha = x^n = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\lambda_p^o = -\frac{I}{S} A_{pa}^a, \quad \nabla \lambda_p^o + \omega_p^o = \lambda_{pi}^o \omega^i. \quad (2.6)$$

Таким образом, линейная поляра (2.5) относительно фокального многообразия $\psi_{r-1}(A; L)$ (2.4) есть нормаль 2-го рода $\psi_{r-1}(A_o)$ в смысле Нордена A -плоскости, а поле таких нормалей определено полем квазитензора $\{\lambda_p^o\}$ (2.6).

2. Аналогично (см. п. 1) находим фокальное многообразие $\Phi_{n-r-1}(N, L)$ в плоскости $\Phi_{n-r}(A_o) = [N_{n-m}(A_o), L(A_o)]$, соответствующее смещениям точки A_o по кривым, принадлежащим A -плоскости:

$$x^p = 0, \quad \det \left\| \delta_q^p x^o + A_{aq}^p x^a + A_{\alpha q}^p x^\alpha + A_{nq}^p x^n \right\| = 0. \quad (2.7)$$

В общем случае (2.7) — алгебраическое многообразие размерности $(n-r-1)$ порядка r . Соответствующая L -плоскость пересекает многообразие (2.7) по алгебраическому многообразию $\varphi_{s-1}(L, A)$ порядка r :

$$x^p = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0, \quad \det \left\| \delta_q^p x^o + A_{aq}^p x^a \right\| = 0. \quad (2.8)$$

Линейная поляра точки A_o относительно многообразия (2.8) задается уравнениями

$$x^o - \lambda_a^o x^a = 0, \quad x^p = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\lambda_a^o = -\frac{I}{r} A_{ap}^p, \quad \nabla \lambda_a^o + \omega_a^o = \lambda_{ai}^o \omega^i. \quad (2.10)$$

Итак, поле квазитензора $\{\lambda_a^o\}$ (2.10) первого порядка задает поле нормалей 2-го рода L -подрасслоения — поле плоскостей $\varphi_{s-1}(A_o)$ (2.9).

Плоскость, натянутая на линейные поляры (2.5, 2.9) точки A_o относительно фокальных многообразий $\psi_{r-1}(A; L)$ (2.4) и $\varphi_{s-1}(L, A)$ (2.8), т. е. плоскость $\tau_{m-1}(A_o) = [\psi_{r-1}(A_o), \varphi_{s-1}(A_o)]$ (τ -плоскость), является плоскостью Нордена — Тимофеева [5] композиции (Λ, L) . Относительно локального репера $R^l(N)$ уравнения плоскости Нордена — Тимофеева $\tau_{m-1}(A_o)$ имеют вид:

$$x^o - \lambda_i^o x^i = 0; \quad x^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (2.11)$$

3. В силу биекции [2]

$$v_n^j = -v_i^o A_n^{ij} + t_o^j \quad (2.12)$$

нормали Нордена — Тимофеева 2-го рода τ_{m-1} (2.11) ставится в соответствие нормаль 1-го рода гиперполосы SH_m :

$$v_n^j = -\lambda_i^o A_n^{ij} + t_o^j \stackrel{def}{=} T_n^j, \quad (2.13)$$

где $t_o^i = \frac{1}{m+2} A_n^{jk} A_{jk}^n$ [2], $A_{ij}^n A_n^{jk} = \delta_i^k$.

Теорема 2. В дифференциальной окрестности 2-го порядка к гиперполосе SH_m внутренним образом присоединяется нормализация Нордена — Тимофеева (τ, T) , соответствующая композиции (Λ, L) .

§ 3. Оснащение гиперполосы SH_m в смысле Картана

1. Найдем фокальное многообразие $\Phi_{n-m-1}(N, \Lambda)$, лежащее в N -плоскости, при смещении точки A_o по кривым, принадлежащим Λ -плоскости:

$$x^i = 0, \quad \det \left\| \delta_b^a x^o + A_{\dot{\alpha}b}^a x^{\dot{\alpha}} \right\| = 0. \quad (3.1)$$

Линейная поляра точки A_o относительно фокального многообразия (3.1) есть $(n-m-1)$ -мерная плоскость $K_{n-m-1}(A_o)$, которая задается уравнениями

$$x^i = 0, \quad x^o - \varphi_{\dot{\alpha}}^o x^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\dot{\alpha}}^o &= -\frac{1}{s} A_{\dot{\alpha}a}^a, \quad \nabla \varphi_{\dot{\alpha}}^o + \omega_{\dot{\alpha}}^o = \varphi_{\dot{\alpha}i}^o \omega^i, \\ \nabla \varphi_{\alpha}^o + \omega_{\alpha}^o &= \varphi_{\alpha i}^o \omega^i, \quad \nabla \varphi_n^o - \varphi_{\alpha}^o \omega_n^{\alpha} + \omega_n^o = \varphi_{ni}^o \omega^i. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогично находим фокальное многообразие $\Psi_{n-m-1}(N, L)$, лежащее в N -плоскости при смещении точки A_o по кривым, принадлежащим L -плоскости:

$$x^i = 0, \quad \det \left\| \delta_q^p x^o + A_{\alpha q}^p x^{\dot{\alpha}} \right\| = 0. \quad (3.4)$$

Линейная поляра точки A_o относительно фокального многообразия (3.4) есть $(n-m-1)$ -мерная плоскость $C_{n-m-1}(A_o)$, которая задается уравнениями

$$x^i = 0, \quad x^o - h_{\dot{\alpha}}^o x^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$h_{\dot{\alpha}}^o = -\frac{1}{r} A_{\dot{\alpha}p}^p, \quad \nabla h_{\dot{\alpha}}^o + \omega_{\dot{\alpha}}^o = h_{\dot{\alpha}i}^o \omega^i; \quad (3.6)$$

$$\nabla h_{\alpha}^o + \omega_{\alpha}^o = h_{\alpha i}^o \omega^i, \quad \nabla h_n^o - h_{\alpha}^o \omega_n^{\alpha} + \omega_n^o = h_{ni}^o \omega^i. \quad (3.7)$$

Итак, поля квазитензоров $\{\varphi_{\dot{\alpha}}^o\}$ (3.3) и $\{h_{\dot{\alpha}}^o\}$ (3.6) задают соответственно поля оснащающих плоскостей Картана $K_{n-m-1}(A_o)$ (3.2) и $C_{n-m-1}(A_o)$ (3.5) гиперполосы SH_m [2]. Так как квазитензоры 3-го порядка $\{\varphi_{\dot{\alpha}}^o\}$ (3.3) и $\{h_{\dot{\alpha}}^o\}$ (3.6) в общем случае (функционально) независимы, то они порождают в каждой N -плоскости пучок оснащающих плоскостей в смысле Э. Картана, который зададим пучком квазитензоров 3-го порядка

$$H_{\dot{\alpha}}^o(\sigma) = \varphi_{\dot{\alpha}}^o + \sigma(h_{\dot{\alpha}}^o - \varphi_{\dot{\alpha}}^o) = \varphi_{\dot{\alpha}}^o + \sigma \tilde{h}_{\dot{\alpha}}^o, \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{h}_{\dot{\alpha}}^o = h_{\dot{\alpha}}^o - \varphi_{\dot{\alpha}}^o, \quad \nabla \tilde{h}_{\dot{\alpha}}^o = \tilde{h}_{\dot{\alpha}}^o \omega^i.$$

Отметим, что пучок (3.8) порождает пучок

$$H_{\alpha}^o(\sigma) = \varphi_{\alpha}^o + \sigma(h_{\alpha}^o - \varphi_{\alpha}^o) = \varphi_{\alpha}^o + \sigma \tilde{h}_{\alpha}^o, \quad (3.9)$$

определяющий в каждой характеристике $X_{n-m-1}(A_o)$ пучок ее нормалей 2-го рода в смысле Нордена.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрический пучок (3.8) ее нормализаций в смысле Э. Картана, который порождает (в свою очередь) однопараметрический пучок нормализаций 2-го рода в смысле Нордена поля характеристик данной гиперполосы SH_m .*

Список литературы

1. Волкова С.Ю. Гиперполосы SH_m проективного пространства/ Балтийский ВМИ им. адмирала Ф.Ф. Ушакова. Калининград, 2005. Деп. в ВИНТИ РАН, №696-B2006.
2. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос: учебное пособие. Калининград, 1983.
3. Акивис М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем// Тр. геом. семинара/ ВИНТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.
4. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара/ ВИНТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.
5. Норден А.П., Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств// Известия вузов. Матем. 1972. №8. С. 81—89.

S. Volkova

NORDEN — TIMOFEEV NORMALIZATION OF REGULAR HYPERSTRIP SH_m IN PROJECTIVE SPACE

In the second-order differential neighborhood is made invariant normalization in the sense of Norden for a hyperstrip.