*С.Е. Степанов, И.И. Цыганок*

*(Владимирский государственный педагогический университет)*

# ЗАМЕТКА О ТЕНЗОРЕ НЕСОВМЕСТНОСТИ

Работа имеет методический характер. В ней доказывается, что рассматриваемый в теоретической механике тензор несовместности совпадает с тензором Эйнштейна, а потому не несет какой-либо новой информации, в результате чего доказываемые в научной литературе свойства тензора несовместности и следующие из них свойства риманова многообразия являются очевидными фактами.

**1. Тензор несовместности.** Рассмотрим трехмерное риманово многообразие $M_3$, отнесенное к локальной системе координат $x^1,\ x^2,\ x^3$. Обозначим через $g_{ij}$ найденные в этой системе координат компоненты метрического тензора $g$ многообразия $M_3$, через $E_{ijk}$ — компоненты дискриминантного тензора Леви-Чивита $E = \det g$, а через $R_{ijkl}$ — компоненты тензора кривизны $R$ многообразия $M_3$.

Шесть независимых компонент $R_{ijkl}$ тензора кривизны $R$ определяют шесть компонент $K^{mn}$ симметричного тензора второго ранга $K$, которые вводятся по формуле

$$K^{mn} = \frac{1}{4} E^{ijm} E^{kln} R_{ijkl}. \qquad (1)$$

Тензор K был введен более 70 лет назад (см. [11, с. 154]) под названием тензора Ламе (см. также [12, с. 355]). В отечественной литературе тензор $K$ носит название *тензора несовместности* (см. [2, с.176]) и отличается отсутствием скалярного множителя $1/4$ в определяющей его формуле (1). Тензор несовместности используется в теоретической механике, о чем можно прочитать, например, в [3 — 7].

Из равенств (1) непосредственно выводится, что (см. также [3, с. 462])

$$R_{ijkl} = E_{ijm} E_{kln} K^{mn} .$$

Поэтому обращения в нуль тензора несовместности и тензора кривизны риманова многообразия $M_3$ равносильны и каждое из этих требований свидетельствует о локальной евклидовости многообразия.

**2. Тензор Эйнштейна.** В монографии [2] тензор несовместности определяется одновременно (см. [2 с. 176]) с тензором Эйнштейна $G = Ric - 2^{-1} S \cdot g$, который имеет компоненты $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} S$ для тензора Риччи *Ric* с компонентами $R_{ij} = g^{kl} R_{ikjl}$ и скалярной кривизны $S = g^{ij} R_{ij}$ (см. [1, с. 141]). При этом оговаривается (что, впрочем, хорошо известно), что тензор Эйнштейна бездивергентный, т.е. $\nabla_k G_j^k = 0$ для символа ковариантного дифференцирования $\nabla_k$ по координате $x^k$.

Давно известно (см. [1, с. 64]), что шесть компонент $R_{ijkl}$ тензора кривизны $R$ выражаются следующим образом:

$$R_{ijkl} = g_{ik} a_{jl} - g_{il} a_{jk} + g_{jl} a_{il} - g_{jk} a_{il} \qquad (2)$$

через шесть компонент $a_{jk} = \frac{1}{4} g_{jk} S - R_{jk}$ симметричного тензора второго ранга $a$. А потому с учетом (1) и (2) заключаем, что

$$K_{ij} = G_{ij} . \qquad (3)$$

В качестве следствия (3) выводим, что тензор несовместности K будет иметь равную нулю дивергенцию. Впрочем, этот факт также хорошо известен (см. [3, с. 462]). Тем более удивительным выглядит недавно проведенное его доказательство, чему была посвящена целая статья [8].

В качестве же следствия из (3) выводим, что на всяком многообразии $M_3$ тензор кривизны удовлетворяет условию

$$R_{ijkl} = E_{ijm} E_{kln} G^{mn}. \tag{4}$$

В таком случае секционная кривизна $\Re(X \wedge Y)$ многообразия $M_3$ (см. [1, с. 102—104]) в направлении произвольной двухмерной площадки $X \wedge Y$ из касательного пространства $T_x M_3$, которая натягивается на пару единичных ортогональных векторов $X$ и $Y$, будет находиться по следующей формуле: $\Re(X \wedge Y) = G^{ij} Z_i Z_j$ для $Z_i = E_{ijk} X^j Y^k$. Следовательно, знакоопределенность секционной кривизны будет зависеть от знакоопределенности тензора Эйнштейна $G$, и в частности от соотношений вида $R_{ij} Z^i Z^j \geq \frac{1}{2} S$ или $R_{ij} Z^i Z^j \leq \frac{1}{2} S$.

В монографии [3] из требования того, что тензор несовместности K является шаровым, т. е. $K^{mn} = \lambda g^{mn}$, выводилась теорема Шура о постоянстве кривизны риманова многообразия $M_3$ (см. [3, с. 462—463]). В свете равенств (3) это утверждение является следствием хорошо известного свойства тензора Риччи трехмерного риманова многообразия (см. [1, с. 117]).

Здесь же заметим, что согласно общей теории (см. [9, с. 211]) каждое трехмерное многообразие $M_3$ допускает задание на нем метрического тензора $\overline{g}$ постоянной секционной кривизны и как следствие этого — задание шарового тензора несовместности $\overline{K}$.

**3. Ослабленные условия евклидовости.** В статье [10] рассматривались так называемые ослабленные условия евклидовости трехмерного риманова многообразия и указывались возможные их приложения к уравнениям неразрывности деформаций. В частности, на трехмерном римановом многообразии $M_3$ вводилась ортогональная система координат $x^1,\ x^2,\ x^3$, в которой на всем многообразии $M_3$ выполнялись следующие равенства: $K^{11} = K^{22} = K^{33} = 0$. Из данного предположения с помощью интегральных уравнений Вольтера выводилось равенство $K = 0$, которое свидетельствовало о локальной евклидовости риманова многообразия $M_3$.

Проведем элементарное доказательство этого факта, для чего напомним, что при наличии ортогональной системы координат $x^1,\ x^2,\ x^3$ на римановом многообразии $M_3$ имеют место следующие соотношения (см. [1, с. 46, 64]):

$$R_{ii} = \frac{1}{g_{jj}} R_{ijji} + \frac{1}{g_{kk}} R_{ikki},\ R_{ij} = \frac{1}{g_{kk}} R_{ikkj},\ S = \sum_{i,j} \frac{1}{g_{ii}} \frac{1}{g_{jj}} R_{ijji} \tag{5}$$

для различных неравных между собою значений индексов $i, j, k$. Из равенств (5), в частности, следует

$$0 = K_{ii} = \frac{1}{4}\left(R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} S\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{g_{jj}} R_{ijji} + \frac{1}{g_{kk}} R_{ikki} - \frac{1}{2} g_{ii}\left(\sum_{k,j} \frac{1}{g_{kk}} \frac{1}{g_{jj}} R_{kjjk}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} g_{ii} \frac{1}{g_{jj}} \frac{1}{g_{kk}} R_{kjjk}. \tag{6}$$

В этом случае для векторов $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ e_2 = \frac{\partial}{\partial x^2},\ e_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}$ ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ касательного пространства $T_x M_3$ из равенств (6) следует, что

$\Re(e_1 \wedge e_2) = \Re(e_1 \wedge e_3) = \Re(e_2 \wedge e_3) = 0$, а потому риманово многообразие $M_3$ — локально евклидовое многообразие.

### *Список литературы*

1. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М. , 1948.
2. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М., 1974.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М., 1970.
4. *Лурье А.И.* Теория упругости. М., 1976.
5. *Победря Б.Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. С. 531—541.
6. *Власов Б.Ф.* Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в форме Сен-Венана // Прикладная механика. 1969. Т. 5. № 12. С. 35—38.
7. *Маковенко С.Я.* Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в произвольной системе координат // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 6. С. 122—124.
8. *Маковенко С.Я.* Об одном дифференциальном свойстве тензора несовместности, определенном в трехмерном римановом многообразии // Межвуз. сб. науч. тр. Строительная механика инженерных сооружений. М., 2001. Вып. 10. С. 68—72.
9. *Бессе А*. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Т. 1. М., 1990.
10. *Маковенко С.Я.* Ослабленные условия евклидовости трехмерного пространства и их применение в механике твердого тела // Сб. науч. тр. РУДН Расчет оболочек строительных конструкци: М., 1982. С. 97—115.
11. *Mc Connell A.J.* Applications of the absolute differential calculus. London, 1931.
12. *Wilkes J.M., Zund J.D.* A note on the Ruse-Lanczos identity // Tensor, N.S. 1978. Vol. 32. P. 355—356.

S. Stepanov, I. Tsyganok

NOTE ABOUT UNCOMPATIBILITY TENSOR

The work is of methodical character. Here it is proved, considered in classical mechanics the uncompatibility tensor coincides with Einstein tensor, therefore does not bring any new information, hence proved in scientific literature the properties of the uncom-

patibility tensor and following from them properties of Riemannian manifold are evident facts.

УДК 514.764.3

***А.В. Столяров***

*(Чувашский государственный педагогический университет)*

# ПРОСТРАНСТВО АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ И РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Показано, что с пространством аффинной связности $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$; если $P_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности, то в данной работе $A_{n,n}$ называется пространством аффинно-метрической связности (пространство $M_{n,n}$). В статье изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии пространства $M_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k = \overline{1, n};\ \ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0, n}.$$

**1.** Пусть задано пространство аффинной связности $A_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^i, \theta^i_j\}$, подчиненных структурным уравнениям [3]

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k + \frac{1}{2} r^i_{st}\theta^s \wedge \theta^t,\ D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \frac{1}{2} r^i_{jst}\theta^s \wedge \theta^t, \qquad (1)$$

где