3. Ведерников С.В. Геометрия пространства пар//ВИНИТИ. М.,1980. 39с. Деп.в ВИНИТИ. 25.2.80,№1454-80.

4. Бургиньон Ж.П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе.1978/79.М., 1985.С.261-279.

УДК 514.76

ОБЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВАЯ СВЯЗНОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ

Ю.И.Шевченко

(Калининградский государственный университет)

Дана интерпретация общей фундаментально-групповой связности Г.Ф. Лаптева с помощью его способа задания связностей в главных расслоениях,распространенного на обобщенные расслоения,характеризующиеся непустыми пересечениями базы и слоев.

Основная работа Лаптева [1] написана без явного использования теории расслоенных пространств и связностей в них,поэтому давно возникла проблема интерпретации понятий и результатов работы с точки зрения расслоений.Эта проблема частично разрешена в книге [2],однако там практически не затронуто пространство общей фундаментально-групповой связности,обобщающее однородное пространство,пространства аффинной и проективной связности,главное и однородное расслоения со связностями.Такое пространство определяется структурными уравнениями:

$$\begin{cases} d\omega^{s_0} = R^{s_0}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_0}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \\ d\omega^{s_1} = \frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ \qquad + R^{s_1}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \\ d\omega^{s_2} = \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\,\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + \\ \qquad + R^{s_2}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{cases} \tag{I}$$

где индексы принимают следующие значения: $p_0, q_0, s_0, \ldots = \overline{-\mathcal{R}+1, 0}$; $p_1, q_1, s_1, \ldots = \overline{1,\tau}$; $p_2, q_2, s_2, \ldots = \overline{\tau+1, r}$. Здесь $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ -структурные константы группы Ли G ,содержащей подгруппу H ,поэтому

$$C^{s_1}_{p_2q_2} = 0, \tag{2}$$

причем,например,индекс s_{12} принимает значения индексов s_1 и s_2.

В общем случае система уравнений (I) задает расслоения не вполне удовлетворительно,что отражают следующие факты: 1) координаты

точки пространства фундаментально -групповой связности расчленяются Лаптевым [3] на главные,побочные и локально-групповые с помощью вполне интегрируемых систем уравнений лишь в случае усеченного кручения,когда $R^{s_1}_{p_0q_0} = 0$ (аналогичное разделение можно произвести при $R^{s_0}_{p_1q_1} = 0$); 2) в работе [4] Лаптев называет тензором кручения-кривизны лишь подобъект $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}}$ объекта $R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}$, видимо,потому,что условия вырождения пространства со связностью в однородное пространство [1 ,с.320] имеют вид $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}} = 0$; 3) Лаптев предполагает,что размерность пространства геометрических элементов больше числа главных форм связности,вследствие чего появляются побочные формы [1,с.305]; 4) в последующих работах Лаптева не употребляется общая связность, а используются только связности в главном расслоении и проективная (см.,напр.,[5]); 5) побочные параметры интерпретируются В.С.Малаховским [6,с.195] как абсолютные инварианты опорной фигуры;если инвариантов нет,то получается рассмотренный Лаптевым случай,в котором,однако,присутствуют побочные параметры.

Проанализируем пример пространства геометрических элементов с достаточно общей фундаментально-групповой связностью.Рассмотрим поверхность в пространстве аффинной связности с присоединенным комплексом индуцированных внутренних геометрий.Покажем,что в этом случае можно обойтись связностями в главных расслоениях.Сделаем два предположения: а) не будем ограничивать внутреннюю геометрию поверхности индуцированной аффинной связностью,как это делал Лаптев [1,с.322]; б) зафиксируем произвольную нормаль поверхности,потому что задание множества всех нормалей фактически ничего не определяет.При этом возникают две возможности: 1) преобразовать все вторичные формы,согласно способу Лаптева,задания связности в главном расслоении и,охватывая объект связности с помощью поля нормалей,получить главное расслоение со связностью,типовым слоем которого служит подгруппа стационарности центрированной касательной плоскости; 2) адаптируя подвижной репер полю нормалей,прийти к главному расслоению со связностью,типовым слоем которого является прямое произведение двух двойственных линейных групп,действующих в центрированных касательной плоскости и нормали.

Решать проблему интерпретации связности начал сам Лаптев [5], предложив способ задания связности в главном расслоении.Структурные уравнения главного расслоения со связностью можно получить из системы уравнений (I) тремя путями.Во-первых,отбрасывая побочные формы связности ω^{s_0} ,имеем уравнения связности Картана [2]:

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1}\wedge\left(\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{q_2} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1}\right),$$

$$d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\left(\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}+R^{s_2}_{p_1q_1}\right)\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}.$$

Если наложить условия $C^{s_2}_{p_1q_2}=0$,то они будут структурными уравнениями связности главного расслоения.Во-вторых,удаляя главные формы связности ω^{s_1} ,найдем $d\omega^{s_0}=R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}$, $d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}$, что соответствует параллелизуемости базы.В-третьих,опуская вторичные формы связности ω^{s_2} при условиях $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $R^{s_1}_{p_{01}q_1}=0$,получим

$$d\omega^{s_0}=\omega^{p_0}\wedge\left(R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{q_0}+2R^{s_0}_{p_0q_1}\omega^{q_1}\right),\quad d\omega^{s_1}=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+R^{s_1}_{p_1q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0};$$

где нужно потребовать существование одной из двух групп тождеств $C^{s_2}_{p_1q_1}=0$ или $C^{s_1}_{p_1q_2}=0$,достаточных для выполнения соответствующих тождеств Якоби.

Следующий шаг сделал Ю.Г.Лумисте [7],исследовав связность в однородном расслоении,соответствующую частному случаю общей фундаментально-групповой связности: $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $R^{s_{12}}_{p_{01}q_1}=0$. Отметим,что однородное расслоение с сечением и соответствующее главное расслоение позволяют дать интерпретацию связности Картана. Двухъярусные расслоения Н.М. Остиану [8] позволили проинтерпретировать [9] еще один частный случай $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $C^{s_2}_{p_1q_2}=0$. Дальнейшее продвижение в этом направлении с помощью известных расслоений не представляется возможным,поэтому предлагается новый подход.

Предварительно изложим в удобной нам форме способ Лаптева [2,с.63, 83],[5] задания связности в главном расслоении $G(V)$ со структурными уравнениями

$$d\theta^i=\theta^j\wedge\theta^i_j,\quad d\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+\theta^i\wedge\omega^\alpha_i,\tag{3}$$

где индексы принимают пересекающиеся множества значений $i,j=\overline{-\mathcal{R}+1,\tau}$, $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,r}$ $(\tau<r)$. Базой главного расслоения $G(V)$ является $(\mathcal{R}+\tau)$ - мерное дифференцируемое многообразие V ,а типовым слоем служит r - членная группа Ли G со структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}$.Рассмотрим преобразование слоевых форм ω^α с помощью базисных форм θ^i: $\tilde{\omega}^\alpha=\omega^\alpha-\Gamma^\alpha_i\theta^i$,где Γ^α_i -некоторые функции.Найдем внешние дифференциалы преобразованных форм

$$d\tilde{\omega}^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^\beta\wedge\tilde{\omega}^\gamma+\theta^i\wedge\left(d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\theta^j_i+\Gamma^\beta_i\vartheta^\alpha_\beta+\omega^\alpha_i\right)-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j\theta^i\wedge\theta^j,\tag{4}$$

где $\vartheta^\alpha_\beta=C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma$. Согласно теореме Картана-Лаптева компоненты объекта связности Γ^α_i должны удовлетворять уравнениям

$$d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\theta^j_i+\Gamma^\beta_i\vartheta^\alpha_\beta+\omega^\alpha_i=\Gamma^\alpha_{ij}\theta^j.$$

Тогда уравнения (4) принимают вид

$$d\tilde{\omega}^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^\beta\wedge\tilde{\omega}^\gamma+R^\alpha_{ij}\theta^i\wedge\theta^j,\tag{5}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам $R^\alpha_{ij}=\Gamma^\alpha_{[ij]}-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{[i}\Gamma^\gamma_{j]}$,причем квадратные скобки обозначают альтернирование.

Обобщим понятие главного расслоенного пространства.Произведем разбиение значений каждого из индексов i,α на две серии следующим образом: $i=(s_0,s_1)$, $\alpha=(s_1,s_2)$.Запишем уравнения (3) подробнее

$$d\theta^{s_0}=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_0}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\theta^{s_0}_{p_1},\tag{6}$$

$$d\theta^{s_1}=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_1}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\theta^{s_1}_{p_1},\tag{7}$$

$$d\omega^{s_1}=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\omega^{s_1}_{p_1},\tag{8}$$
$$d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_{12}q_{12}}\omega^{p_{12}}\wedge\omega^{q_{12}}+\theta^{p_{01}}\wedge\omega^{s_2}_{p_{01}}.$$

Предположим,что база V и слои G главного расслоения $G(V)$ имеют непустые пересечения,причем $\dim V\cap G=\tau$. Аналитически выразим это тождествами $\theta^{s_1}=\omega^{s_1}$.Сравнивая системы уравнений (7) и (8), в качестве достаточных условий их совпадения получим соотношения (2) и следующие: $\theta^{s_1}_{p_0}=\omega^{s_1}_{p_0}$, $\theta^{s_1}_{p_1}=\omega^{s_1}_{p_1}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{q_2}$.

Таким образом,структурные уравнения обобщенного главного расслоения $G\backslash V(V)$ имеют вид

$$\begin{cases} d\theta^{s_0}=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_0}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\theta^{s_0}_{p_1},\\ d\omega^{s_1}=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\omega^{s_1}_{p_1},\\ d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_2}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\omega^{s_2}_{p_1}.\end{cases}\tag{9}$$

Применим способ Лаптева задания связности к обобщенному главному расслоению $G\backslash V(V)$. Формы связности $\tilde{\omega}^\alpha$ запишем в виде

$$\tilde{\omega}^{s_1}=\Lambda^{s_1}_{p_1}\omega^{p_1}-\Gamma^{s_1}_{p_0}\theta^{p_0},\quad \tilde{\omega}^{s_2}=\omega^{s_2}-\Gamma^{s_2}_{p_0}\theta^{p_0}-\Gamma^{s_2}_{p_1}\omega^{p_1},\tag{10}$$

где $\Lambda^{s_1}_{p_1}=\delta^{s_1}_{p_1}-\Gamma^{s_1}_{p_1}$. В общем случае матрица $\|\Lambda^{s_1}_{p_1}\|$ имеет обратную матрицу $\|V^{q_1}_{s_1}\|$. Для ее элементов выполняются соотношения $V^{q_1}_{s_1}\Lambda^{s_1}_{p_1}=\delta^{q_1}_{p_1}$,с учетом которых из первой системы равенств (10) найдем

$$\omega^{p_1}=V^{p_1}_{q_1}\tilde{\omega}^{q_1}+V^{p_1}_{q_0}\theta^{q_0}\qquad\left(V^{p_1}_{q_0}=V^{p_1}_{s_1}\Gamma^{s_1}_{q_0}\right).$$

Теперь структурные уравнения (5) можно преобразовать:

$$d\tilde{\omega}^{s_{12}}=\frac{1}{2}C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}\tilde{\omega}^{p_{12}}\wedge\tilde{\omega}^{q_{12}}+\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0q_0}\theta^{p_0}\wedge\theta^{q_0}+2\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0q_1}\theta^{p_0}\wedge\tilde{\omega}^{q_1}+\tilde{R}^{s_{12}}_{p_1q_1}\tilde{\omega}^{p_1}\wedge\tilde{\omega}^{q_1},\tag{11}$$

где

$$\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0q_0}=R^{s_{12}}_{p_0q_0}-2V^{p_1}_{[p_0}R^{s_{12}}_{q_0]p_1}+R^{s_{12}}_{\tau_1t_1}V^{\tau_1}_{[p_0}V^{t_1}_{q_0]},$$

$$\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0q_1}=R^{s_{12}}_{p_0p_1}V^{p_1}_{q_1}+R^{s_{12}}_{r_1t_1}V^{r_1}_{p_0}V^{t_1}_{q_1},\quad \tilde{R}^{s_{12}}_{p_1q_1}=R^{s_{12}}_{r_1t_1}V^{r_1}_{[p_1}V^{t_1}_{q_1]}.$$

Выберем формы $\theta^{s_0}_{p_{01}}$ в виде

$$\theta^{s_0}_{p_0}=R^{s_0}_{p_0q_0}\theta^{q_0}+2R^{s_0}_{p_0q_1}\tilde{\omega}^{q_1},\quad \theta^{s_0}_{p_1}=R^{s_0}_{p_1q_0}\theta^{q_0}+R^{s_0}_{p_1q_1}\tilde{\omega}^{q_1}, \tag{I2}$$

тогда уравнения (6) примут вид

$$d\theta^{s_0}=\tilde{R}^{s_0}_{p_0q_0}\theta^{p_0}\wedge\theta^{q_0}+2\tilde{R}^{s_0}_{p_0q_1}\theta^{p_0}\wedge\tilde{\omega}^{q_1}+\tilde{R}^{s_0}_{p_1q_1}\tilde{\omega}^{p_1}\wedge\tilde{\omega}^{q_1}; \tag{I3}$$

где

$$\tilde{R}^{s_0}_{p_0q_0}=R^{s_0}_{[p_0q_0]}-R^{s_0}_{s_1[p_0}V^{s_1}_{q_0]},\quad \tilde{R}^{s_0}_{p_0q_1}=R^{s_0}_{p_0q_1}-R^{s_0}_{s_1[p_0}V^{s_1}_{q_1]},\quad \tilde{R}^{s_0}_{p_1q_1}=-R^{s_0}_{s_1[p_1}V^{s_1}_{q_1]}.$$

Уравнения (I1),(I3) с точностью до обозначений составляют систему (I). Многообразие V при условиях (I2) имеет специальное строение. Деривационные формулы подвижного векторного репера $e_{p_{01}}$ касательного пространства $T_{\mathcal{R}+r}$ размерности $\mathcal{R}+r$ к многообразию V в фиксированной точке имеют вид $\delta e_{p_0}=\bar{\theta}^{s_1}_{p_0}e_{s_1}$, $\delta e_{p_1}=\bar{\theta}^{s_1}_{p_1}e_{s_1}$,
где $\bar{\theta}^{s_1}_{p_0}=\omega^{s_1}_{p_0}\big|_{\theta^{s_{01}}=0}$, $\bar{\theta}^{s_1}_{p_1}=(\omega^{s_1}_{p_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{q_2})\big|_{\theta^{s_{01}}=0}$.
Значит, касательное пространство имеет r-мерное подпространство $L_r\subset T_{\mathcal{R}+r}$, а фактор-пространство $T_{\mathcal{R}+r}|L_r$ натянуто на $\mathcal{R}$ инвариантных векторов. Итак, доказана

Т е о р е м а. Обобщенное главное расслоение $G\backslash V$ (V) со специальной базой V, в котором задана связность по Г.Ф.Лаптеву (как в главном расслоении), является пространством общей фундаментально-групповой связности.

З а м е ч а н и я. 1) Если положить $\theta^{s_0}_{p_1}=0$, $\omega^{s_{12}}_{p_1}=0$, то система (9) дает структурные уравнения пространства элементов Лаптева [1,с.317],[7,с.441],[9]. 2) Понятие обобщенного расслоения (не обязательно главного) соединяет два крайних случая: а) расслоение с заданным сечением, в котором базу отождествляют с ее образом, поэтому говорят о приклеивании расслоения к базе (см., например, [2 ,с.110]); б) касательное расслоение над аффинным пространством, когда слои отождествляются с базой. 3) Способ Лаптева задания связностей в главных расслоениях уже применялся для конкретных обобщенных расслоений [10 ,с.69] ,[11,с.37],[12].

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва/ГИТТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2.Е в т у ш и к Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П.Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы

геометрии/ВИНИТИ .М.,1979.Т.9.248с.

3.Л а п т е в Г.Ф. О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью//Докл.АН СССР.1950.Т.73.№1.С.17-20.

4.Л а п т е в Г.Ф. О фундаментально-групповой связности многообразия однородных пространств// Успехи матем.наук.1951.Т.6.Вып.1. С.164-165.

5.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства//Тр. IV Всес.матем.съезда,1961.Л.:Наука,1964.Т.2.С.226-233.

6.М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.179-206.

7.Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях//Матем. сб.1966.Т.69.С.434-469.

8.О с т и а н у Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства//Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.5.С.259-309.

9.Ш е в ч е н к о Ю.И. О фундаментально-групповой связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16.С.104-109.

10.Л а п т е в Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m - мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр.геом. семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-93.

11.С т о л я р о в А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1977.Т.8.С.25-46.

12.Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащении Картана//Дифференциальная геометрия многообразий фигур/Калинингр. ун-т.Калининград,1983.Вып. 14.С.107-110.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ R

С.В.Ш м е л е в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}$ линейчатых невырожденных квадрик Q, имеющая четверку невырождающихся фокальных поверхностей (A_α) ($\alpha=0,1,2,3$), описанных вершинами автополярного тетраэдра третьего рода квадрики Q. Доказано, что каждая из фокальных поверхностей (A_α) -сдвоенная, и исследован подкласс $\mathcal{L}_0$ конгруэнций $\mathcal{L}$, в котором поверхности (A_α)

14 Зак. 1209