УДК 513

И.М. Бурлаков
Тверской государственный университет
Don.burlakoff@yandex.ru

Алгебры с сопряжением и геометрия неквадратичных форм

Рассматриваются алгебры с сопряжением, представляющие обобщение композиционных алгебр. Такие алгебры на линейном пространстве задают геометрическую структуру с фундаментальной формой произвольной степени. На гладких многообразиях фундаментальная форма определяется при помощи расслоений алгебр с сопряжением и задает на многообразии почти риманову структуру.

Ключевые слова: алгебра, векторное расслоение, калибровочная группа движений, почти риманово пространство.

В геометрии линейных пространств с фундаментальной квадратичной формой важную роль играют композиционные алгебры, которые характеризуются тождеством

$$g(x \cdot y) = g(x)g(y)\,, \tag{1}$$

где $g(x)$ — квадратичная форма, заданная на линейном пространстве алгебры A, и $x, y \in A$ — произвольные элементы этой алгебры. К таким алгебрам относятся алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионов и антикватернионов, октав и антиоктав, а произвольные алгебры Клиффорда представляют собой тензорные произведения композиционных алгебр [1].

Композиционные алгебры характеризуются тем, что на них можно задать эндоморфизм сопряжения $x \to \bar{x}$, такой, что

$$\bar{x} \cdot x = g(x) \text{ и } \overline{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \qquad (2)$$

для любых $x, y \in A$ [2].

Обобщением композиционных алгебр будут алгебры, в которых отображение $x \to \bar{x}$, удовлетворяющее условиям (2), уже не будет эндоморфизмом, а форма $g(x)$ будет однородным многочленом произвольной степени m. При этом отображение $x \to \bar{x}$ будет называться сопряжением (как и в случае композиционных алгебр), а сами эти алгебры мы будем называть *алгебрами с сопряжением*.

Определение алгебр с сопряжением естественно ставит вопрос о существовании таких алгебр (отличных от композиционных). Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема (*о групповых алгебрах*). *Любая групповая алгебра является алгеброй с сопряжением.*

Доказательство. Пусть $F(G)$ — групповая алгебра над полем F с базовой группой G и $1, e_1, \ldots, e_m$ элементы этой группы, так что произвольный элемент $x \in F(G)$ представляется линейной комбинацией $x = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m$. Тогда линейное алгебраическое уравнение $x \cdot a = b$ будет эквивалентно системе линейных скалярных уравнений $\alpha_k^r x_r = b_k$, где строки детерминанта $\Delta(a) = \det \alpha_k^r$ представляют собой перестановки координат элемента $a = a_0 + a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m$.

Обозначим теперь A_k алгебраические дополнения к элементам первой строки детерминанта $\Delta(a)$, и положим что

$$\bar{a} = A_0 + A_1 e_1 + \ldots + A_m e_m . \qquad (3)$$

Тогда из свойств определителей следует, что $\bar{a} \cdot a = \Delta(a)$. Поэтому, если принять детерминант произвольного элемента

$x \in F(G)$ за фундаментальную форму степени m, то первое из тождеств (2) будет выполнено. И нам остается показать, что для сопряжения, определенного по формуле (3): $\overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Для этого заметим, что если $\varDelta(a) \neq 0$, то элемент a обратим, и $a^{-1} = \overline{a}/\varDelta(a)$. Поэтому для обратимых элементов

$$\frac{\overline{a \cdot b}}{\varDelta(a \cdot b)} = \frac{\overline{b}}{\varDelta(b)} \cdot \frac{\overline{a}}{\varDelta(a)} = \frac{\overline{b} \cdot \overline{a}}{\varDelta(a \cdot b)} \text{ и } \overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a},$$

так как $\varDelta(a \cdot b) = \varDelta(a)\varDelta(b)$ в силу ассоциативности групповой алгебры [3]. А на любые элементы тождество $\overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ распространяется по непрерывности, поскольку множество элементов $x \in F(G)$, для которых $\varDelta(x) = 0$, образует алгебраическую гиперповерхность в m-мерном аффинном пространстве. Теорема доказана.

Заметим еще, что групповые алгебры не исчерпывают всего множества алгебр с сопряжением. Например, алгебрами с сопряжением будут альтернативные почти групповые алгебры, то есть альтернативные алгебры, у которых произведение базисных векторов лишь некоторым скалярным множителем отличается от группового умножения элементов базовой группы.

На линейном пространстве алгебры с сопряжением A отображение $x \to \overline{x}$ определяет геометрию с фундаментальной формой $g(x) = \overline{x} \cdot x$, в которой движениями будут преобразования, задаваемые функциями

$$x' = L_a(x) \equiv a \cdot x \text{ или } x' = Ad_a(x) \equiv a \cdot x \cdot \overline{a}, \tag{4}$$

где x — произвольный элемент алгебры A, а a принадлежит специальной регулярной группе $S \subset A$, то есть $g(a) = 1$. При этом легко видеть, что множество преобразований вида (4) образуют группы $\mathrm{L}\,S \subset \mathrm{GL}(A)$, $\mathrm{Ad}\,S \subset \mathrm{GL}(A)$.

Форма $g(x) = \overline{x} \cdot x$ инвариантна относительно преобразований (4), поэтому длину векторов $x \in A$ можно задать формулой $l(x) \equiv \sqrt[k]{|\bar{x} \cdot x|}$, где $k = \deg g(x)$. В случае композиционных алгебр определенная так длина вектора будет совпадать с евклидовой или псевдоевклидовой длиной. В случае же когда неравенство $l(x) \leq c \in R^+$ определяет выпуклое тело, мы говорим, что алгебра с сопряжением A удовлетворяет условию выпуклости, тогда величина $l(x)$ определяет метрику Минковского [4].

Для унитальных алгебр с сопряжением помимо формы $g(x)$ рассмотрим еще *полулинейную* функцию $\langle y, x \rangle$, представляющую собой скалярную часть произведения $\bar{y} \cdot x$, которая очевидно будет инвариантна относительно преобразований вида (4). Для композиционных алгебр эта функция дает евклидово или псевдоевклидово скалярное произведение, поэтому $\langle y, x \rangle$ можно считать аналогом скалярного произведения в геометрии с фундаментальной формой $g(x)$. При помощи этой функции определяется угловая мера для пары векторов, получаемых из единицы алгебры левыми сдвигами, аналогично тому, как эта мера определяется на линейных пространствах композиционных алгебр.

Геометрическую структуру, задаваемую на линейном пространстве алгебры с сопряжением фундаментальной формой $g(x) = \bar{x} \cdot x$, можно локально перенести на гладкие многообразия. Для этого над каждым касательным пространством T_q в точках $q \in M$ гладкого многообразия M построим алгебру A_q изоморфную некоторой алгебре с сопряжением A и рассмотрим объединение

$$AM \equiv \bigcup_{q \in M} A_q \ .$$

Таким образом, мы получим векторное расслоение с тотальным пространством AM, базой M, типовым слоем A и естественной проекцией $\pi : AM \to M$, такой что $\pi(A_q) = q$. Сечения $\eta(q) : M \to AM$ этого расслоения образуют бесконечномерную алгебру, ограничения которой на каждую точку q дают алгебры A_q.

Отображения сопряжения элементов в каждом слое A_q индуцирует отображение $\eta(q) \to \overline{\eta}(q)$ сопряжения алгебраических полей $\eta(q)$. И на гладком многообразии M возникает форма $g(\eta(q)) = \overline{\eta}(q) \cdot \eta(q)$, инвариантная относительно калибровочных групп преобразований вида

$$\eta'(q) = a(q) \cdot \eta(q) \text{ или } \eta'(q) = a(q) \cdot \eta(q) \cdot \overline{a}(q),$$

где $\overline{a}(q) \cdot a(q) = 1$. Форма $g(\eta(q))$ на гладком многообразии M определяет почти риманову геометрическую структуру, в которой длина касательного вектора $\xi(q) \in T_q$ определяется следующей формулой:

$$l(\xi(q)) = \sqrt[m]{\left|\overline{\xi}(q) \cdot \xi(q)\right|}\ . \tag{5}$$

А скалярная часть произведения $\overline{\eta}(q) \cdot \mu(q)$, где $\eta(q)$ и $\mu(q)$ произвольные алгебраические поля, дает полулинейную форму скалярного произведения, при помощи которого определяется угловая мера для пар касательных векторов.

В случае когда A композиционная алгебра, мы на гладком многообразии M получим риманову или псевдориманову геометрию. И в этом случае калибровочная группа, элементами которой являются алгебраические поля $a(q)$, удовлетворяющие условию $\overline{a}(q) \cdot a(q) = 1$, будет спинорной группой соответствующего риманова или псевдориманова пространства. [5]. Если же алгебра A, задающая типовой слой алгебраического расслоения, удовлетворяет условию выпуклости, то фундаментальная форма $g(\eta(q))$ на гладком многообразии задает финслерову геометрию [4].

Список литературы

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М., 1955.
2. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1969.
3. *Бурлаков И. М.* Геометрические структуры на линейных алгебрах // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 29—34.
4. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.
5. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. М., 1987.

I. Burlakov

Algebras with conjugation and geometry of nonquadratic forms

Algebras with conjugation, representing a generalization of composition algebras are considered. Such algebras on a linear space give geometric structure with a fundamental form of arbitrary degree. On smooth manifolds fundamental form is defined by means of bundles of algebras with conjugation and sets almost Riemannian structure on a manifold.

УДК 514.76

С. В. Галаев
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
sgalaev@mail.ru

О характеристических классах Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств

На многообразии с почти контактной метрической структурой определяется N-продолженная симплектическая связность. С помощью N-продолженной симплектической связности определяются обобщенные классы Маслова лежандровых