

О. О. Белова¹ 

¹Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-6

Плоские связности в области проективного пространства

В проективном пространстве рассмотрена область, описанная точкой. Над областью возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности точки.

В этом расслоении задана фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву. Показано, что оснащение Бортолотти рассматриваемой области индуцирует центропроективные связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем данные связности имеют нулевую кривизну и нулевоекручение.

Даны геометрические характеристики полученным связностям.

Ключевые слова: проективное пространство, связность, расслоение, оснащение Бортолотти, кривизна, кручение

Теория связностей различных многообразий имеет широкое применение в математике и физике.

Связность с нулевой кривизной (плоская связность) играет важную роль в теории солитонов (см., напр., [9]). Аффинные и эквивариантные связности нулевой кривизны были изучены в работах [3; 5], а в [4] тот же автор рассмотрел ненулевую кривизну для связностей в нередуцированных пространствах.

Поступила в редакцию 15.12.2024 г.

© Белова О. О., 2025

В [2] Гольдберг исследовал нулевую кривизну параметрического семейства многомерных плоскостей и показал, что аффинная связность является проективно евклидовой тогда и только тогда, когда рассмотренный им объект имеет нулевую кривизну.

В [10] Трофимов рассмотрел каноническую связность с нулевой кривизной на расслоении линейных реперов.

Нулевая кривизна влияет на тип параллельных перенесений. Если компоненты объекта кривизны групповой связности равны нулю, то параллельные перенесения в рассматриваемой связности являются абсолютными; обратное тоже верно (см. [7; 8]).

Исследуем кривизну и кручение связности на многообразии Грассмана точек.

В проективном пространстве P_n будем использовать подвижной репер $\{A, A_I\}$ ($I, \dots = 1, \dots, n$) с инфинитезимальными перемещениями

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,$$

$$dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

где линейная форма θ играет роль множителя пропорциональности, а формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^K \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

Рассмотрим частный случай многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ всех m -мерных плоскостей L_m , когда $m = 0$. Таким образом, получим многообразие Грассмана $V = Gr(0, n)$ точек [12].

Формы ω^I являются главными, так как при их обнулении фиксируется точка A .

Получим главное расслоение $G(V)$ ($\dim G = n(n + 1)$), которое является расслоением центропроективных реперов с типовым слоем — подгруппой G стационарности точки A :

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I.$$

В статье [1] автор рассмотрел такую область проективного пространства, задав фундаментально-групповую связность в ассоциированном направлении методом Г.Ф. Лаптева. Были исследованы центропроективные связности трех типов, получены условия их совпадения и дана геометрическая интерпретация связности 1-го типа.

Связность в главном расслоении $G(V)$ зададим способом Лаптева — Лумисте [6]:

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K,$$

$$\tilde{\omega}_I = \omega_I - \Gamma_{IJ} \omega^J.$$

Компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{JK}^I, \Gamma_{IJ}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta \Gamma_{JK}^I - \delta_J^I \omega_K - \delta_K^I \omega_J = \Gamma_{JKL}^I \omega^L,$$

$$\Delta \Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K = \Gamma_{IJK} \omega^K,$$

причем оператор Δ действует по закону

$$\Delta \Gamma_{JK}^I = d\Gamma_{JK}^I + \Gamma_{JK}^L \omega_L^I - \Gamma_{LK}^I \omega_J^L - \Gamma_{JL}^I \omega_K^L.$$

Структурные уравнения форм связности имеют вид

$$D\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_K^I \wedge \tilde{\omega}_J^K + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L,$$

$$D\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_J^I \wedge \tilde{\omega}_J + R_{IJK} \omega^J \wedge \omega^K,$$

где

$$R_{JKL}^I = \Gamma_{J[KL]}^I + \Gamma_{F[K}^I \Gamma_{JL]}^F,$$

$$R_{IJK} = \Gamma_{I[JK]} + \Gamma_{L[J}\Gamma_{IK]}^L$$

являются компонентами кривизны $R = \{R_{JKL}^I, R_{IJK}\}$ связности Γ . Квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам.

При продолжении дифференциальных уравнений получим следующие сравнения по модулю базисных форм ω^I :

$$\Delta\Gamma_{JKL}^I + \Gamma_{JK}^I\omega_L + \Gamma_{JL}^I\omega_K + \Gamma_{LK}^I\omega_J - \delta_L^I\Gamma_{JK}^F\omega_F \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{IJK} + \Gamma_{IJK}^L\omega_L + 2\Gamma_{IJ}\omega_K + \Gamma_{IK}\omega_J + \Gamma_{KJ}\omega_I \equiv 0.$$

Подставим формы связности $\tilde{\omega}_J^I$ в структурные уравнения базисных форм ω^I , тогда

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \tilde{\omega}_J^I + S_{JK}^I\omega^J \wedge \omega^K,$$

где $S_{JK}^I = \Gamma_{[JK]}^I$ — компоненты объекта кручения S .

Произведем оснащение Бортолотти [13] многообразия V , которое состоит в присоединении к каждой точке A гиперплоскости P_{n-1} , не проходящей через данную точку. Данное оснащение индуцирует центропроективные связности трех типов в расслоении центропроективных реперов $G(V)$, ассоциированном с областью V проективного пространства P_n (см.: [1]):

$$\overset{0}{\Gamma}_{JK}^I = -\delta_J^I\lambda_K - \delta_K^I\lambda_J,$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{IJ} = -\lambda_I\lambda_J, \quad \overset{02}{\Gamma}_{IJ} = \lambda_{IJ} - 2\lambda_I\lambda_J, \quad \overset{03}{\Gamma}_{IJ} = -\lambda_{IJ}.$$

Находим охваты пфаффовых производных компонент объекта связности Γ :

$$\overset{0}{\Gamma}_{JKL}^I = -\delta_J^I\lambda_K\lambda_L - \delta_K^I\lambda_J\lambda_L,$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{IJK} = -2\lambda_I\lambda_J\lambda_K;$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{IJK} = 2\lambda_{IJ}\lambda_K + \lambda_{IK}\lambda_J + \lambda_{KJ}\lambda_I - 6\lambda_I\lambda_J\lambda_K;$$

$$\overset{03}{\Gamma}_{IJK} = -2\lambda_{IJ}\lambda_K - \lambda_{IK}\lambda_J - \lambda_{KJ}\lambda_I + 2\lambda_I\lambda_J\lambda_K.$$

Учитывая полученные охваты, имеем

$$\overset{01}{R}_{JKL}^I = 0, \quad \overset{01}{R}_{IJ} = 0;$$

$$\overset{02}{R}_{JKL}^I = 0, \quad \overset{02}{R}_{IJ} = 0;$$

$$\overset{03}{R}_{JKL}^I = 0, \quad \overset{03}{R}_{IJ} = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Тензор кривизны R во всех трех связностях имеет нулевые компоненты, то есть индуцированные центропроективные связности в расслоении над областью V проективного пространства имеют нулевую кривизну, таким образом, связности являются плоскими.*

Учитывая охват в выражениях компонент кручения, получим

$$\overset{0}{S}_{JK}^I = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Тензор кручения S в связности $\overset{0}{\Gamma}$ имеет нулевые компоненты, то есть индуцированные центропроективные связности в расслоении над областью V проективного пространства имеют нулевое кручение, то есть связность будет симметрической [11].*

Дадим геометрическую характеристику оснащающей гиперплоскости P_{n-1} .

Гиперплоскость зададим точками

$$B_I = A_I + \lambda_I A,$$

где $\lambda = \{\lambda_I\}$ — оснащающий квазитензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^I

$$\Delta\lambda_I + \omega_I \equiv 0.$$

Находя дифференциалы точек B_I и учитывая охваты, получим

$$dB_I = (\theta - \lambda_J \omega^J)B_I + \tilde{\omega}_I^J B_J + (\nabla^{01} \lambda_I - \lambda_I \lambda_J \omega^J)A, \quad (1)$$

$$dB_I = (\theta - \lambda_J \omega^J)B_I + \tilde{\omega}_I^J B_J + [\nabla^{02} \lambda_I + (\lambda_{IJ} - \lambda_I \lambda_J) \omega^J]A,$$

$$dB_I = (\theta - \lambda_J \omega^J)B_I + \tilde{\omega}_I^J B_J + [\nabla^{03} \lambda_I + (-\lambda_{IJ} + \lambda_I \lambda_J) \omega^J]A,$$

где $\nabla^{01} \lambda_I, \nabla^{02} \lambda_I, \nabla^{03} \lambda_I$ — ковариантные дифференциалы оснащающего квазитензора в соответствующих связностях.

Из полученных формул видно, что при обращении ковариантных дифференциалов в нуль во всех трех связностях оснащающая плоскость остается на месте.

Замечание. Ковариантные дифференциалы

$$\nabla \lambda_I = d\lambda_I - \lambda_J \tilde{\omega}_I^J + \tilde{\omega}_I = (\lambda_{IJ} - \Gamma_{IJ} + \lambda_K \Gamma_{IJ}^K) \omega^J$$

оснащающего квазитензора λ в связностях имеют вид

$$\nabla^{01} \lambda_I = (\lambda_{IJ} - \lambda_I \lambda_J) \omega^J,$$

$$\nabla^{02} \lambda_I = 0,$$

$$\nabla^{03} \lambda_I = 2(\lambda_{IJ} - \lambda_I \lambda_J) \omega^J.$$

Таким образом, $\nabla^{01} \lambda_I = 0$ и $\nabla^{03} \lambda_I = 0$, если $\lambda_{IJ} = \lambda_I \lambda_J$.

Теорема 3. Простой подобъект $\Gamma_1^0 = \{\Gamma_{JK}^I\}$ объектов связности Γ , Γ , Γ характеризуется центральным проектированием плоскости $P_{n-1} + dP_{n-1}$, смежной с гиперплоскостью P_{n-1} , на исходную плоскость P_{n-1} из центра — точки A .

Доказательство. Проекция плоскости $P_{n-1} + dP_{n-1}$, которая смежна с плоскостью P_{n-1} , из центра — точки A определяется формами связности $\tilde{\omega}_I^J$, которые выражаются с помо-

щью подобъекта $\Gamma_1^0 = \{\Gamma_{JK}^1\}$, так как имеет место равенство (1).

Таким образом, справедливо утверждение

$$\Gamma_1^0: P_{n-1} + dP_{n-1} \xrightarrow{A} P_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Белова О.О. Связности трех типов в расслоении над областью проективного пространства // ДГМФ. 2003. №34. С. 21—26.
2. Гольдберг В.В. Об одном свойстве тканей с нулевой кривизной // Изв. вузов. Математика. 1975. №9. С. 10—13.
3. Можей Н.П. Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины, 2017. №6 (105). С. 104—111.
4. Можей Н.П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Известия Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 381—393. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.
5. Можей Н.П. Эквивариантные связности нулевой кривизны на однородных пространствах с разрешимой группой преобразований // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины. 2020. №6 (123). С. 131—137.
6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.
7. Полякова К.В. Тензор параллельности и абсолютные параллельные перенесения // ДГМФ. 2001. №32. С. 94—98.
8. Полякова К.В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства. Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177.
9. Рыбников А.К. Построение солитонов уравнений синус-Гордона и Кортевега — де Фриза при помощи связностей, определяющих представления нулевой кривизны // Учен. записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т. 153, кн. 3. С. 72—80.
10. Трофимов Ю.А. О канонической плоской связности на расслоении линейных реперов // ДГМФ. 2009. №40. С. 129—134.

11. Черников Н. А. Конспект теории аффинной связности для гравитационистов // Сообщения объединенного Института ядерных исследований. Дубна, 1986.

12. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

13. Bortolotti E. Connessioni nelle varietà luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. № 3. С. 81—89.

Для цитирования: Белова О. О. Плоские связности для области проективного пространства // ДГМФ. 2025. № 56. С. 59—68. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-6>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2010: 53A20, 53B15

O. O. Belova 

Immanuel Kant Baltic Federal University,
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-6

Flat connections in a domain of projective space

Submitted on December 15, 2024

The theory of connections of manifolds has wide application in mathematics and physics.

Flat connection affects the type of parallel translations.

In the present paper, we study the curvature and torsion of connections on the Grassmann manifold of points.

In projective space, the region described by a point is considered. A principal bundle arises over the domain, the typical fiber of which is the stationarity subgroup of a point.

A fundamental group connection according to G. F. Laptev is given in this bundle. It is shown that the Bortolotti's clothing of

the domain induces centroprojective connections of three types in the associated bundle, and these connections have zero curvature and the connections are torsion-free.

A geometric characteristics of the resulting connections are given:

1) when the covariant differentials vanish in all three connections, the clothing hyperplane is immovable;

2) a simple subobject $\Gamma_1 = \{\Gamma_{JK}^I\}$ of connection objects $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ is characterized by the central projection of the plane $P_{n-1} + dP_{n-1}$ adjacent to the hyperplane P_{n-1} to the original plane P_{n-1} from the center — the point A .

Keywords: projective space, connection, fibering, Bortolotti's clothing, curvature, torsion

References

1. Belova O. O.: Connections of three types in a bundle over a domain of projective space. DGMF, 34, 21—26 (2003).
2. Goldberg V. V.: About one property of fabrics with zero curvature. Izvestia Vuzov. Math., 9, 10—13 (1975).
3. Mozhey N. P.: Connections of zero curvature on homogeneous spaces of solvable Lie groups. Izvestia Gomel Univ. named after F. Skaryny, 6:105, 104—111 (2017).
4. Mozhey N. P.: Connections of Non-zero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. Izvestia Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 17:4, 381—393. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393 (2017).
5. Mozhey N. P.: Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces with a solvable transformation group. Izvestia Gomel Univ. named after F. Skaryny, 6:123, 131—137 (2020).
6. Norden A. P.: Spaces of affine connection. Moscow, Nauka (1976).
7. Polyakova K. V.: Parallelism tensor and absolute parallel displacements. DGMF, 32, 94—98 (2001).
8. Polyakova K. V.: Parallel translations on the surface of projective space. J. of Math. Sci., 162:5, 675—709 (2009).
9. Rybnikov A. K.: Construction of solitons of the sine-Gordon and Korteweg — de Vries equations using connections defining representations of zero curvature. Scientific Notes Kazan. Univ. Ser. Phys.-Math. Sciences, 153:3, 72—80 (2011).

10. *Trofimov Y.*: On canonical flat connection on linear frame bundle. DGMF, 40, 129—134 (2009).

11. *Chernikov N.A.*: Abstract of the theory of affine connection for gravitationalists. Communications of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (1986).

12. *Shevchenko Yu.I.*: Clothings of centroprojective manifolds, Kaliningrad (2000).

13. *Bortolotti E.*: Connessioni nelle varietà luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 3, 81—89 (1933).

For citation: Belova, O.O.: Flat connections in a domain of projective space. DGMF, 56, 59—68 (2025). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-6>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))