УДК 51:1 (271.01.05.15)

ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИКИ: КОНСТРУКТИВНЫЙ ХАРАКТЕР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ[1]

С. Л. Катречко[*]

Трансцендентальная философия Канта нацелена на исследование как человеческого способа познания в целом (В 25), так и отдельных видов нашего познания с целью обоснования их объективной значимости. Задачей данной статьи является экспликации кантовского понимания математического (по)знания как «конструирования [конструкции из] понятий» (см.: «конструировать понятие – значит показать априори соответствующее ему созерцание» (А 713/В 741)), основательность которой «зиждется на дефинициях, аксиомах и демонстрациях» (А 726/В 754). Математические предметы в отличие от конкретных «физических» имеют абстрактный характер и вводятся посредством принципа абстракции Юма – Фреге. Кант на основе своего учения о схематизме развивает оригинальную концепцию абстракции: кантовские схемы выступают как способы построения (конструирования) математических предметов, как «действия чистого мышления» (В 81). Конструктивное понимание математической деятельности, восходящее к генетическому методу Евклида, стало важной новацией Канта и лежит в основе современного математического формализма, интуиционизма и конструктивизма. В рамках кантовского конструктивизма математику можно представить как двухуровневую систему познания, что предполагает первоначальный «спуск» с уровня рассудочных понятий на уровень чувственных созерцаний, где собственно и осуществляются математические действия, и обратный «подъем» наверх. На этой основе мы развиваем концепцию трансцендентального конструктивизма (прагматизма). В частности, кантовскую «созерцательность» математики можно понимать как ее структурность и говорить о «логическом пространстве» (Витгенштейн; ср. со структуралистским пониманием математики). Кант выделяет два типа конструирования: остенсивное (геометрия) и символическое (алгебра). Анализируется каждый из этих типов конструирования и показывается, что современные математические построения (конструкции) представляют сочетание и пере-

[1] Данное исследование выполнено при поддержке программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг. (грант №14-01-0195), а также поддержано грантом РГНФ №16-03-50208. Статья является продолжением нашей работы для «Кантовского сборника» (Катречко, 2015).

[*] Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)
105064, Россия, Москва, ул. Ст. Басманная, д. 21, стр. 4, ком. 414в.

Поступила в редакцию: 14.11.2015 г.
doi: 10.5922/0207-6918-2016-1-2

плетение обоих типов конструирования, а также выделяется третий тип – логическое конструирование (при доказательстве теорем), который наследует черты обоих типов кантовского конструирования.

Ключевые слова: *трансцендентальная философия (трансцендентализм) Канта, трансцендентальный прагматизм, математика как познание посредством конструирования.*

* * *

В нашей первой статье «Трансцендентальный анализ математики: абстрактная природа математического знания» (Катречко, 2015) мы раскрыли абстрактный характер математического знания, что связано с тем, что математические (абстрактные) *понятия-предметы* в отличие от *конкретных* предметов естествознания даются нам не с помощью чувственного созерцания, а вводятся посредством кантовской дефиниции (Кант, 1994, с. 537; В 756), или *принципа абстракции Юма – Фреге*. Этим задается, по сути, некоторый абстрактный (интеллигибельный) мир особых математических сущностей, с которым работает математик[2], хотя этот мир и следует отличать от собственно («чистого») интеллигибельного мира идей, поскольку в нем задействован не только наш ум (рассудок), но и воображение, и который Платон соотносит с применением гибридного «незаконнорожденного рассуждения». Понятно, что в этом математическом мире не могут действовать физические законы: например, (нульмерная) *геометрическая точка* не может двигаться под воздействием обычных физических сил и поэтому, скажем, неоплатоник Прокл для решения проблемы геометрического движения вводит особое *воображаемое* движение *точки* путем «истечения» (в результате чего образуется *линия*)[3]. Поэтому для абстрактного мира математических сущностей в общем случае необходимо вводить особые (математические) *законы* их функционирования и *действия* по их преобразованию. Первая задача решается путем введения *аксиом*, с помощью которых устанавливаются базовые отношения между введенными математическими абстрактами, а вторая – *определенной системы математических действий*[4], допустимость которых (опять-таки в силу абстрактности объектов математики) необходимо особо обосновать: например, в Античности (у Евклида) таковыми выступали построения с помощью циркуля и линейки.

---

[2] Тезис об абстрактной природе математики эксплицировал Аристотель (1975, с. 374), хотя, конечно, он во многом опирался на понимание математики у своих предшественников: Пифагора и, особенно, Платона. С этим тезисом с теми или иными оговорками согласны многие ведущие философы и математики XX—XXI вв.: Кантор, Фреге, Гуссерль, Гильберт, Бернайс, Гёдель, Клини, Гудстейн, Колмогоров, Хинтикка, Булос, Залта, Шафаревич, Манин и др. В данном случае хотелось бы подчеркнуть «межконфессиональный» характер данного тезиса: это не платоническое (Гёдель) или логицистское (Фреге), или формалистское (Гильберт), или интуиционистко-конструктивное (Клини) понимание, а некоторый общий тренд в осмыслении «новой математики» XX в. Хотя в настоящее время есть и весомые противники трактовки математики как «работы» с абстрактными объектами, которые развивают *натуралистический* подход к пониманию математики.

[3] Хотя, конечно, *математическое* движение посредством истечения соответствует *физическому* реактивному движению, поэтому различие математики и физики не является контрарным.

[4] Ср. с кантовской характеристикой математики: основательность математики «зиждется на дефинициях, аксиомах и демонстрациях» (Кант, 1994, с. 536; [А 726/В 754]).

Замечание 1. Об аксиомах математики[5]. Математические *аксиомы*[6], в которых фиксируются соотношения между вводимыми через *дефиниции* математическими объектами (например, «прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками») или между разными свойствами одного и того же объекта («ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой»), выступают аналогами физических законов. Если математические *понятия* (абстракции) представляются как единство сходных по построению (посредством схем) предметов, то *аксиомы* — как (мета)синтез этих понятий в суждение, из которых далее можно получать посредством *демонстраций* (A 726/B 754) новые следствия (например, *теоремы*). При этом аксиомы имеют не *дискурсивный* (рассудочный), а *интуитивный* (точнее, дискурсивно-интуитивный) и синтетический характер: «посредством конструирования понятий… [математик] может *в созерцании* предмета a priori и непосредственно связать его предикаты, как, например, [в утверждении], что три точки всегда лежат в одной плоскости» (Кант, 1994 с. 540—541; B 760—761). Соответственно, априорно—синтетический характер математических аксиом обеспечивают синтетический (информативный) характер математического знания.

Таким образом, Кант, выделив аксиомы в качестве необходимой составляющей математического знания (хотя приоритет в этом вопросе, конечно, принадлежит Евклиду), предвосхитил важный тренд развития современной математики, развитие которой в XX—XXI вв. благодаря усилиям Гильберта и его последователей немыслимо без *аксиоматического метода* (Гильберт, 1998)[7]. Вместе с тем эпистемологический статус *аксиом* в современной математики до конца не прояснен и требует своего методологического осмысления, поскольку сейчас под *аксиомами* понимают систему разнородных положений как *декларативного*, так и *процедурного* характера, образующих фундамент той или иной теории. В этой связи можно вспомнить о «Началах» Евклида, где в качестве *начал* математического знания выделяются постулаты трех типов: *определения*, (собственно) *аксиомы* (общие положения) и *постулаты* (построения)[8]. Это свидетельствует, в частности, о необходимости дальнейшего трансцендентального анализа математического знания для решения в том числе и проблемы дифференциации аксиом.

В ряде работ крупный математик и логик XX в. Р. Гудстейн сравнивает математику с игрой в шахматы, подчеркивая тем самым ее не-физическую природу (Гудстейн, 1961). Данной аналогией акцентируется онтологиче-

---

[5] Эта тема заслуживает особого исследования, но здесь мы ограничимся небольшим замечанием.

[6] Евклид называет их не аксиомами, а *постулатами*.

[7] В данном случае мы говорим об аксиоматическом методе в широком (общем) смысле как экспликации посредством аксиом основных «законов» той или иной предметной области, для исследования которой и используется соответствующая математическая теория. Однако тот же Гильберт выделяет *аксиоматический* и *генетический* (конструктивный) методы построения математических теорий (Гильберт, 1948, с. 315—321; см. подробнее об этом (Смирнов, 2001), а также полемику в «Логических исследованиях» (http://iph.ras.ru/login.htm) учеников В.А. Смирнова: В.И. Шалака, А.М. Анисова и др.). В этом смысле кантовское понимание математики как *конструирования понятий* соответствует скорее не *аксиоматическому*, а *генетически – конструктивному* подходу Евклида, хотя самого Канта при этом интересует не столько конструктивный способ задания математических объектов, сколько *конструктивный характер* математических построений.

[8] Хотя это различение частично учитывается, например, в математической логике, где при задании формальных исчислений вводятся не только *аксиомы*, но и выделяются также *правила вывода*.

ская специфика абстрактных «объектов» математики: нас не должно вводить в заблуждение использование в математике физических предметов (типа шахматных фигур), поскольку используемые подобным образом физические предметы только *представляют* (или *выражают*) скрываемые за ними математические сущности, то есть выступают лишь *символами* собственно математического[9].

Понятно, что математические абстракты в отличие от конкретных (физических) объектов не-находимы в реальном мире (например, «числа на дороге не валяются»), ибо «в самой природе нет ни кругов, ни треугольников, ни прямых линий» (Койре/Галилей)[10]. Вместе с тем математические абстракция не являются и пустыми фантазиями нашего ума. Для прояснения (задания) их онтологической специфики можно воспользоваться семиотическим треугольником Фреге: если конкретные объекты соотносятся с денотатами знаков (3-я вершина), то абстрактные объекты можно соотнести с областью смысла (2-я вершина). Между тем математические объекты следует отличать и от математических символов/знаков (1-я вершина треугольника; номиналистическая трактовка математики)[11].

Приведенная выше *негативная* фиксация абстрактного в качестве чего-то неконкретного является слишком неопределенной и должна быть дополнена *позитивными* характеристиками. Однако здесь мы сталкиваемся с двумя проблемами. С одной стороны, современный методологический анализ показывает, что концептуальная простота абстрактного обманчива и для всего многообразия абстрактного не удается предложить единого (универсального) критерия. Например, в своей статье из *SEP* Г. Розен (Rosen, 2001) рассматривает наиболее значимые варианты критерия абстрактного: 1) абстрактное как вне-пространственное и вне-временное; 2) абст-

---

[9] Тем самым сложность понимания математики связана с феноменом *двойной символизации*. Математические предметы, с одной стороны, выступают символами конкретно физического, абстракциями, полученными из физических предметов (если мы понимаем абстракцию в классическом смысле (Аристотель, Локк) как операцию отвлечения). С другой — для работы с математическими абстрактами вводятся их физические «заместители» (представители). Как это происходит, например, в кинематографе, когда актер (= реальный человек) играет роль выдуманного персонажа (= абстрактного объекта) типа Шерлока Холмса. Подробнее об этом феномене мы говорим в (Катречко, 2014в). Хотя, конечно, возможна и чисто эмпирическая (номиналистская) трактовка математического, при которой под математическим понимают именно эти «заместители», каковыми, скажем, выступают *цифры* как знаки для [математических] чисел (в этой связи заметим, что Ч. Парсонс характеризует математические сущности как «квази—конкретные объекты» (Parsons, 2008)).

[10] Мысль Галилея в изложении А. Койре (Койре, 1985, с. 144). Поводом для этого послужила цитата из «Диалога о двух главнейших системах мира» Галилея: «Все математические тонкости истинны лишь абстрактно. Но, будучи приложенными к чувственной и физической материи, они не функционируют» (Галилей, 1964, с. 302; 306—307). Вместе с тем надо иметь в виду, что именно Галилей выступает одним из основных «платоников» Нового времени: «Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова: без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту» (Галилей, 1987, с. 41).

[11] Подробнее об онтологическом статусе математических объектов мы говорим в (Катречко, 2014b).

рактное как каузально неэффективное и другое, — и показывает их неуниверсальность. К сходным результатам (хотя и по другим основаниям) приходит и российский исследователь М. Новоселов, который в своих работах (Новоселов, 2000) отмечает разные типы: абстракцию неразличимости, абстракцию индивидуации, изолирующую абстракцию, абстракцию отождествления и другие, — и показывает, что их нельзя подвести под одно определение, поскольку *абстрактное* является размытым понятием по типу «семейного сходства» Витгенштейна.

С другой же — следует точнее определить онтологический статус абстракций. Здесь возможны три альтернативы: абстракция выступает как *объект*, *свойство* или *отношение*. Наш подход связан с модификацией первого варианта, в основу которого положена эстетическая концепция Р. Ингардена: абстракция — это *возможный* объект (из области фрегевского *смысла*), характеристики которого в отличие от конкретных объектов заданы лишь частично: например, *Шерлок Холмс* — не реальный (конкретный), а лишь *возможный* человек (абстрактный объект), в силу чего ряд его характеристик (цвет волос и др.) не до конца определены и могут варьироваться (ср. с математической *переменной*)[12].

Однако поскольку трансцендентальный подход нацелен на исследование «способа познания» (B 25), то большее внимание он уделяет эпистемологической проблематике, а именно кантовской *субъективной* и *объективной* «дедукции», первая из которых исследует вопрос происхождения/образования математических абстракций (кантовская концепция *эпигенезиса*), а вторая — их «объективной значимости», то есть возможности использования математических абстракция для познания действительности (в свете известной максимы Е. Вигнера о «непостижимой эффективности математики в естественных науках»). В обоих случаях Кант предлагает свои оригинальные решения. Для решения первой проблемы он развивает концепцию схематизма, поскольку именно *схемы* лежат в основе «чистых чувственных понятий» математики (B 180—181), специфика которых состоит в том, что они образованы посредством «произвольного синтеза, который может быть сконструирован a prori» (Кант, 1994, с. 538; B 757), поскольку «содержат в себе чистые [чувственные] созерцания» (Кант, 1994, с. 532; A 718/B 747)[13]. Соответственно, генезис математических абстрактов связан не с отвлечением от конкретных предметов, а с выявлением общего способа построения сходных образов, который представлен в кантовских *схемах*[14].

---

[12] Тезис о недоопределенности математических объектов был сформулирован Г. Фреге и получил название *проблемы Юлия Цезаря*. Его суть состоит в том, что денотатом некоего числа как абстрактного объекта может быть, например, реальный человек, Юлий Цезарь (Фреге, 2000, с. 83). Ср. также с известным афоризмом Д. Гильберта: «Справедливость аксиом и теорем ничуть не поколеблется, если мы заменим привычные термины "точка, прямая, плоскость" другими, столь же условными: "стул, стол, пивная кружка"!»

[13] Кант называет их (resp. *схемы*) «*чувственными понятиями* [предмета]» (Кант, 1994, с. 162; B 186), что звучит несколько парадоксально в свете его строгого различения чувственности и рассудка.

[14] Заметим, что, с одной стороны, принцип абстракции Юма — Фреге определяет формальную корректность введения математических объектов, но обходят стороной проблему их генезиса, решить которую можно на основе кантовского *схематизма*. С другой — кантовский *схематизм* во многом схож с *эйдетической интуицией* Э. Гуссерля, в основе которой лежит процедура *варьирования* (ср. с кантовской цитатой (выше) о «произвольном синтезе [понятий]…» (B 757)).

* * *

Однако наиболее значимой новацией Канта, выступающей следствием и развитием его понимания абстрактной природы математики, является трактовка им математической деятельности как «*познания посредством конструирования понятий*» (Кант, 1994, с. 528; A 713/B 741), благодаря чему математическим *понятиям* ставятся в соответствие «a priori соответствующие им [общезначимые] *созерцания*» (Там же)[15]. Тем самым Кант развивает концепцию *трансцендентального конструктивизма* (*прагматизма*)[16].

При этом *трансцендентальный конструктивизм* выступает реализацией кантовского методологического принципа (его *объективной дедукции*) о том, что необходимо «сделать *чувственным всякое* абстрактное понятие, то есть показать соответствующий ему объект в созерцании…» (Кант, 1994, с. 237; B 299), который «…математика выполняет, конструируя фигуру [как созерцание a priori]» (Там же) [17]. В тексте *Критики* есть немало примеров подобных *конструкций*, но парадигмальным выступает следующая: «Так, мы мыслим треугольник (понятие. — *К. С.*) как предмет, когда сознаем сочетание трех прямых линий согласно правилу (схеме. — *К. С.*), соответственно которому такое созерцание всегда может быть показано» (Кант, 1994, с. 630; A 105; см. также A 108)[18]. Ключевым для понимания кантовского *конструктивизма* выступает следующий фрагмент:

---

[15] Ранее мы уже неоднократно обращали внимание на то, что при понимании русского переводного термина «созерцание», который соответствует кантовскому термину ‘*Anschauung*’, надо учитывать, что стандартным образом (например, в англоязычных переводах *Критики*) немецкий ‘*Anschauung*’ переводится как «интуиция». А *интуиция* (*Anschauung*) понимается в Новое время, в том числе и Кантом, как *непосредственное* и *конкретное* (in concreto) представление (representation) чувственности/воображения в противовес *опосредованному* и *абстрактному* представлению (понятию) рассудка. См., например: http://www.textlog.de/31941.html

[16] С одной стороны, *трансцендентальный прагматизм* Канта следует отличать от *трансцендентальной прагматики* в духе К.-О. Апеля и Ю. Хабермаса: по Канту, трансцендентальное действие — это *ментальные* действия нашего мышления (Кант, 1994, с. 93; B 81), а не «коммуникативные действия» (прагматизм Ч. Пирса). С другой — *трансцендентальный конструктивизм* также отличен от программы *эрлагенского конструктивизма* (П. Лоренцен, Г. Динглер), которые предлагают интерпретировать математические объекты и действия физикалистски. Анализу и развитию кантовской концепции математики (resp трансцендентальному конструктивизму) посвящены наши работы (Катречко, 2003, 2007, 2008, 2011, 2013, 2014a, 2015).

[17] Ср. с фрагментом из главы «Дисциплина чистого разума в догматическом применении», в которой излагается кантовская концепция математики: «Все наше познание относится в конечном счете к возможным созерцаниям, так как только посредством них дается предмет» (Кант, 1994, с. 532; A 717/B 747). И далее Кант продолжает: «априорное понятие… [математики] уже содержит в себе чистое созерцание, и тогда оно может быть конструировано» (Там же).

[18] Приведем два из них. 1. «Мы не можем мыслить линию, не *проводя* ее мысленно, не можем мыслить окружность, не *описывая* ее, не можем представить себе три измерения пространства, не *проводя* из одной точки трех перпендикулярных друг другу линий, и даже время мы можем мыслить не иначе, как обращая внимание при *проведении* прямой линии (которая должна быть внешне фигурным представлением о времени) исключительно на действие синтеза многообразного» (Кант, 1994, с. 142; B 155); 2. «А для того чтобы познать что-то в пространстве, например линию, я должен *провести* ее, стало быть, синтетически осуществить определенную связь данного

> *Философское* познание есть *познание разумом посредством понятий*, а математическое знание есть познание посредством *конструкции* [из] понятий[19]. Но конструировать понятие — значит показать a priori соответствующее ему созерцание. Следовательно, для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие… Единичная нарисованная фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только действие по конструированию понятия[20], для которого многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь от этих разных [определений], не изменяющих понятия треугольника (Кант, 1994, с. 528; A 713/B 741) (подчеркнуто мной. — *С. К.*)[21].

Для прояснения тезиса о «конструировании понятий» Кант чуть ниже анализирует доказательство теоремы о равенстве суммы углов треугольника (Кант, 1994, с. 530; B 744—5). При этом он обращает внимание на то, что в ходе подобной математической деятельности исходное (рассудочное) понятие треугольника (по определению как предмета, состоящего из трех углов) преобразуется в остенсивную созерцательную конструкцию — *фигуру* треугольника, что позволяет разложить его (ее) на составляющие: отрезки, прямые и углы, — осуществить дополнительное построение (проведение прямой через одну из его вершин и продолжение двух других сторон), а также привлечь для доказательства открывшуюся при этом построении но-

---

многообразного, так что единство этого действия есть вместе с тем единство сознания (в понятии линии), и только благодаря этому познается объект (определенное пространство)» (Кант, 1994, с.130; B 138 и др.). Обратим внимание на кантовское выделение курсивом «[ментальных] действий субъекта» (B 155; B 81). Именно поэтому кантовскую концепцию мы определяем как *трансцендентальный прагматизм*.

[19] В цитате мы привели дословный перевод фразы «…die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen» (нем.), хотя выше мы опирались на другой, более близкий нам, вариант перевода: «математическое знание есть знание посредством *конструирования* понятий» (B 741). Эти переводы разным образом расставляют акценты в ключевой характеристике математической деятельности: «*конструирование понятий* vs. *конструкция [из] понятий*», причем в кантовских текстах присутствуют оба смысла. В первом случае под «конструированием» понимается сам *процесс* (конструирования), во втором — *результат* этого процесса, *созерцательная конструкция*.

[20] Ср. с кантовскими «действиями чистого рассудка» (B 81); трансцендентальный *прагматизм*.

[21] Ср. с фрагментом (A 715—6/B 743—4), где Кант поясняет введенное им различение между философией и математикой и развивает тему конструирования: «Философия держится только общих понятий, а математика ничего не может добиться посредством одних лишь понятий и тотчас спешит [перейти] к созерцанию, в котором она рассматривает понятие in concreto, однако не эмпирически, а лишь в таком созерцании, которое она показывает a priori, то есть конструирует, и в котором то, что следует из общих условий конструирования, должно быть приложимо также и к объекту конструируемого понятия». См. также кантовское замечание из фрагмента (A 711/B 739): «в математике… понятия тотчас же должны быть показаны in concreto в чистом созерцании (интуиции)» (Кант, 1994; с. 525; с. 529—30).

вую созерцательную «очевидность» (информацию) о равенстве соответствующих углов. За счет подобного введения *новых* объектов и, соответственно, *новых* действий с ними (в созерцательной среде), а также усмотрений открывающихся при этом новых очевидностей, удается синтезировать (получить) новое знание о треугольнике, то есть доказать искомую теорему о том, что сумма углов произвольного треугольника равна 180 градусам[22]. В завершении своего анализа Кант говорит, что при доказательстве геометр «все время руководствуется созерцанием» (B 745), подчеркивая этим, что созерцательные априорные формы (пространство) выступают необходимым условием математической деятельности, а именно созерцательной средой[23], в которой только и можно осуществлять те или иные математические действия над элементами конструкции: геометрические построения и последующие усмотрения *очевидных* «равенств».

В концептуальном плане кантовское конструирование понятий, если перейти на современный математический язык, может быть понято как «спецификация природы [абстрактных] объектов [посредством] *представления* (или *модели*) этой абстрактной системы, [которая есть] система объектов, удовлетворяющей соотношениям абстрактной системы и, кроме того, обладающих… и другими свойствами» (Клини, 1957, с. 30)[24]. Подобное кон-

---

[22] Мысль о том, что синтетический характер математических построений связан с переформулировкой исходной задачи в языке более «низкого» уровня с более богатым набором объектов, к которым, соответственно, можно применять новые математические действия мы позаимствовали из следующего описания доказательства нашей теоремы: «Рассмотрим доказательство геометрической теоремы: сумма углов любого прямолинейного треугольника ABC на евклидовой плоскости составляет 180 градусов. Для доказательства выбирается какая-либо сторона треугольника, например AB, и через противолежащую ей вершину C проводится параллельная выбранной стороне прямая, далее каждая сторона треугольника трактуется как прямая, что позволяет перейти к рассуждениям только о соотношениях прямых и углов с ними связанных. А именно имеются две параллельные прямые, которые секутся двумя прямыми, являющимися продолжениями сторон треугольника, прилегающих к выбранной. Затем происходит обращение к свойствам накрест лежащих внутренних углов, из чего истинность теоремы усматривается непосредственно после возврата к исходному треугольнику. В указанном построении применяется инструмент… который можно условно назвать «прямые». От треугольника и его свойств рассуждение переходит исключительно к свойствам и взаимоотношениям прямых. То есть происходит интерпретация первоначальных объектов — треугольника, его сторон и углов в терминах прямых и углов между ними. Восходящая интерпретация возвращает рассуждения к свойствам углов треугольника. Инструмент «прямые» не выходит за рамки самой геометрической теории, но его свойства совершенно независимы от свойств треугольников, то есть составляют подтеорию. Теория эвклидовой плоскости неоднородна, в ней реализованы независимые инструменты, и именно эта неоднородность является предпосылкой построения достаточно богатой теории» (Шульпеков, 2014, с. 324—325).

[23] Неоплатоники в этой связи говорят о пространстве как *умопостигаемой материи* геометрических объектов.

[24] Правда, сам Клини чуть ниже замечает, что «эти объекты [модели] не обязаны быть более конкретными» (Там же). Однако здесь нам представляется более интересным (как продолжение мысли Клини о *моделях*) замечание Е. Винберга: «…в принципе все равно, какую из изоморфных друг другу структур изучать… Однако выбор модели может оказаться небезразличным для фактического решения какой-

струирование (моделирование) позволяет сделать абстрактное математическое понятие осмысленным, придать ему предметное значение[25].

Тем самым кантовская идея понимания математики как *конструирования понятий*, хотя она присутствует, как мы выяснили выше, на уровне дефиниций и аксиом, но только в математической деятельности («демонстрации») *конструирование* обретает свой сущностный смысл. При этом собственно математическая деятельность, которую обобщенно именуют *демонстрацией*, мыслится Кантом как *сложный* двухуровневый способ познания. Она начинается с создания посредством дефиниций «чистых чувственных понятий» (B 180), специфика которых состоит в том, что они «содержат в себе чистые [чувственные] созерцания» (B 747) и образованы посредством «*действий* чистого мышления» (B 81), то есть «произвольного синтеза, который может быть сконструирован a prori» (B 757). Например, понятие *треугольника* заключает *схему* как «общезначимое созерцание» треугольника (кантовский пример), понятие «направление» образовано как синтетическое обобщение ряда параллельных прямых (пример Фреге). Это позволяет — при *конструировании понятий* — осуществить *спуск* на уровень чувственности к схематическому образу понятия. Здесь, как бы при обратном прочтении (слева — направо) принципа абстракции Юма — Фреге, происходит *декодирование* исходного понятия (или суждения) и извлечение содержащейся в нем необходимой для получения результата созерцательной информации[26]. При этом декларативное единство понятия представляется уже как структурное единство «предметов» более низкого уровня, представленных в некоторой созерцательной (пространственно-временной) *среде*, с которыми теперь мы можем совершать те или иные математические операции. Именно здесь и совершается *творческая* математическая деятельность соответствующего типа: геометрические построения, алгебраические вычисления или логические доказательства, каждая из которых, в свою очередь, представляет некоторую совокупность допустимых в этой среде локальных действий-операций (проведения прямых, деление чисел, применение правил вывода и др.) с объектами более низкого типа. За счет этого на уровне чувственного созерцания происходит выход за пределы первоначального рассудочного понятия/суждения и (синтетическое) приращение знаний, поскольку любое подобное ментальное *действие* представляет собой *синтез* как минимум двух представлений: переход от начального к конечному представлению[27]. А результат этого построения

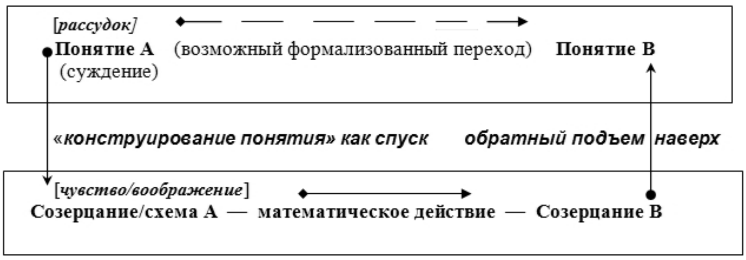
либо задачи. Определенная модель может предоставить для этого наибольшее удобство (или эффективность. — *К. С.*). Например, если какая-то модель имеет геометрический характер, то она позволяет применить геометрические методы (в частности, применять геометрические построения, опираясь на геометрическую интуицию. — *К. С.*)» (Винберг, 2002, с. 10).

[25] Близкий к оригиналу парафраз (Кант, 1994, с. 237; B 299).

[26] Ср. с различением «поверхностная vs. глубинная информация» у Я. Хинтикки (Хинтикка, 1980).

[27] В структурном плане любое *действие* представляет собой синтез *пары* представлений «начальное состояние — конечное состояние (как результат действия)». Поэтому любое действие является *синтетичным*. Это, в частности, проясняет кантовский тезис о том, что выражение «5 + 7 = 12», выражающее операцию *сложения* двух чисел, имеет *синтетический* характер. Его синтетичность связана именно с *действием* сложения, которое объединяет в *сумму* члены сложения: именно оно придает итогово-

(resp. вычисления, доказательства) фиксируется в математическом символьном языке при обратном подъема (возврате) на рассудочный уровень. Схематически общую структуру математического действия можно представить так[28]:



Примечания. **1.** В современной математике подобные доказательства формализуются в подходящем аксиоматизированном исчислении в качестве *логического вывода*. Однако здесь вслед за И. Лакатосом (Лакатос, 1967) следует различать собственно математическую деятельность как последовательность математических действий в созерцательных средах (пространства и времени) в нижней части схемы и ее *логическое оформление*, которое может быть представлено в верхнем блоке схемы как формально-логический переход («вывод») от формулы ***A*** к формуле ***B***[29]. При этом первое нельзя полностью свести ко второму, поскольку целью *формального доказательства* является не моделирование реальной математической деятельности (например, проведенных геометрических построений при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника), а лишь гарантия его логической *правильности* (корректности). Поэтому *структура* собственно математического процесса доказательства отличается от его логического оформления («вывода») в некотором формальном метаязыке (исчислении). Более того, как мы покажем ниже, и само логическое доказательство также подпадает под кантовскую характеристику «конструирования понятий», поскольку в нем также присутствует «созерцательность» определенного типа.

2. Понятно также, что ситуация в современной математике гораздо сложнее, поскольку рассмотренный выше принцип абстракции Юма — Фреге в качестве основного способа порождения математических абстракций может применяться итеративно, порождая абстракции все более и более высоких уровней. Следовательно, и конкретизирующие эти абстракции *спуски* также будут много-

---

му представлению синтетический характер. Поэтому нельзя, как это делает Фреге, критикуя Канта, в своих «Основоположениях арифметики», трактовать запись «5 + 7 = 12» лишь как *формальное* равенство (рассудка), поскольку за ним имплицитно присутствует (ментальное) действие по конструированию этого понятия, собственно *сложение*, которое происходит на уровне (чувственного) созерцания как *объединение* конкретных «заместителей» математических единиц (например, реальных палочек или типографских штрихов), содержащихся в числах 5 и 7. Соответственно, математическое «=» означает здесь не столько *равенство* левой и правой части формулы, сколько правомерность *перехода* от левой к правой части математического выражения как результату этого действия.

[28] Хотя данная схема выражает в первую очередь структуру геометрических демонстраций, но является парадигмальной для математики в целом и может быть *mutatis mutandis* распространена и на другие типы математической деятельности.

[29] В работе «Доказательства и опровержения» И. Лакатос соотносит последнее с «анализом доказательства» и различает, соответственно, строгость (математического) *доказательства* и строгость (логического) *анализа доказательства*.

уровневыми, причем промежуточные *спуски*, скорее всего, будут не переходами на уровень чувственности (созерцания), а на некий более конкретный рассудочный уровень. Однако здесь следует руководствоваться кантовским тезисом о необходимости «сделать *чувственным всякое* абстрактное понятие» (B 298), что предполагает итоговый *спуск* на уровень чувственного созерцания, например к геометрическому чертежу.

* * *

В своем трансцендентальном анализе математики Кант выделяет два типа конструирования: *геометрическое и алгебраическое*. Наряду с *остенсивным* (от лат. *ostentus* — показывание) конструированием, опирающимся на пространственную интуицию, или созерцание в пространстве, Кант выделяет также фундированное временной интуицией *символическое конструирование*, лежащее в основе алгебраической деятельности:

> Математика конструирует не только величины (quanta), как это делается в геометрии, но и величину как таковую (quantitas), как это делается в алгебре, совершенно отвлекающейся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины. Она избирает себе при этом определенные обозначения для всех конструирований величин вообще [= чисел], каковы сложение, вычитание, извлечение корня и т.д.; затем, обозначив общее понятие величин в их различных отношениях, она изображает *в созерцании* соответственно определенным общим правилам *все операции*, производящие и изменяющие величину, когда одна величина должна быть разделена другой, *она соединяет их знаки по обозначающей форме деления и т.п. и таким образом с помощью символической конструкции*, так же как геометрия с помощью остенсивной… конструкции… достигает того, чего дискурсивное познание посредством одних лишь понятий [= философия] никогда не может достигнуть (Кант, 1994, с. 530; B 745); (подчеркивание и курсив мои. — *С.К.*).

Переходя к анализу *алгебры* как более абстрактному (по сравнению с геометрией) типу математической деятельности, обратим внимание на следующее. Во-первых, одной из важнейших конституент алгебры служит использование «языка *x-ов* и *y-ов*», или переход по сравнению с арифметикой к метаязыку *переменных*, который позволяет «работать» не только с определенными *числами*, как это делается в арифметике, но и с *абстрактными величинами* (*переменными*), значение которых в общем случае произвольно[30].

Во-вторых, не менее важным обстоятельством, на что особо обращает внимание Кант, является то, что язык алгебры (в отличие от геометрии) позволяет символически выражать не только абстрактные объекты, но и (арифметические) *операции* («действия»), которые можно производить с этими объектами. Тем самым алгебраический язык представляет собой в отличие от *декларативного* языка, например языка метафизики или литературы, особый *процедурный* язык, в котором зафиксированы возможные способы работы с математическим объектами, то есть способы, *как* надо производить те или иные математические действия. В этом алгебра отличается и от геометрии (напомним, что речь идет о XVIII—XIX вв.): если геометриче-

---

[30] В этом состоит принципиальное отличие *алгебры* от *арифметики*. Решение (конкретного) примера **2 + 3 = 5** есть задача *арифметическая*, а решение уравнения **3 + <u>x</u> = 5** является уже задачей *алгебраической*. Возникновение собственно алгебры можно связать с трактом Диофанта «Арифметикой» (III в. до н.э.), в котором впервые стала использоваться алгебраическая символика, то есть язык *x*-ов и *y*-ов.

ские действия (как, впрочем, и объекты) невозможно выразить в каком-либо языке, а их полный перечень не определен, то алгебраические объекты и действия уже выражаются в языке (посредством математической символики типа «+», «√» и др.), а их полный перечень точен, что делает алгебру более строгой[31]. Заметим также, что *символическое* алгебраическое конструирование, на что указывает его название, является *абстрактным* и в другом отношении: по сути, посредством соответствующих обозначений алгебраические операции лишь *символизируются*, то есть представляются в сокращенном (символическом) виде (скорее как *результаты*), а реально осуществляются уже за пределами того или иного алгебраического формульного символизма. Так, символическая (формульная) запись умножения двух чисел «$a \cdot b$» предполагает реальное действие умножения a и b за пределами данной записи, например посредством *умножение столбиком*, что выступает *а-ля* геометрической созерцательной конструкцией и позволяет «подключить» к алгебраической деятельности *геометрическую интуицию*.

Тем не менее, кажется, что при символическом конструировании (в алгебре) постулируемый Кантом разрыв между понятийным и созерцательным уровнем значительно сокращается. Точнее, в случае *геометрического конструирования* можно говорить о различии между вербальным (понятийным) языком и графической созерцательной средой (как квазиязыком). В случае *алгебраического* (символического) конструирования такой созерцательной средой, по Канту, выступает априорная форма времени: если геометрические преобразования (построения) осуществляются в пространстве, то алгебраические преобразования (вычисления), как, впрочем, и геометрические построения, происходят во времени[32]. Однако при этом вся алгебраическая деятельность осуществляется в едином символическом языке (алгебры), который выступает прежде всего средством (средой) для функционирования понятий (рассудка). Разрешение этого затруднения (для сохранения единой кантианской позиции относительно всех разделов математики) состоит в том, что любой язык, в том числе и вербальный, обладает определенной созерцательностью, или «пространством»[33]. Другое дело, что в обычном — линейном — функционировании нашего языка (в том числе и языка алгебраических формул) его «созерцательность» вырождена до одного измерения (хотя то же алгебраическое «умножение столбиком» указывает на возможность расширения (использования) «пространства» языка до двух измерений[34]). В настоящее время эта «созерцательность» языка фиксируется как наличие в нем (языковых) *структур*. Соответственно, кантовский тезис о конструировании можно понимать теперь как необходимость *структурного представления понятий* (знаний), поскольку именно *структура* выступает необходимым (трансцендентальным) условием для любой конструкции, а, например, *геометрическое пространство* выступает лишь как частный случай структурности. Структурное представление по-

---

[31] Заметим, что в настоящее время по этому «алгебраическому» образцу (фундаментом которого является аксиоматический метод) строится большинство разделов современной математики.

[32] «Временную» тему Кант, по сути, не развивает, ограничиваясь примерами из области геометрии.

[33] Л. Витгенштейн в этой связи говорит даже о «логическом пространстве» языка (см. его в «Логико-философском трактат», фрагменты 2.013—2.0131, 3.41—3.42 и др.).

[34] Более того, в языке можно создавать и другие квазипространственные *конструкции*.

нятия позволяет эксплицировать имеющую в нем структурную [глубинную] информацию, разложить исходный объект на ряд связанных друг с другом более простых объектов (например, представить треугольник как *систему* из трех линий и углов), с которыми потом можно совершать определенный набор «действий» (математических преобразований)[35].

Замечание 2. О конструировании в логике. Кантовскую концепцию конструирования *mutatis mutandis* можно распространить и на современную формальную логику. В своем трансцендентальном анализе различных «способов познания» Кант, по сути, не рассматривает *логику*. Это связано с тем, что для него (общая) логика представляется в отличие от вводимой им *трансцендентальной логики* вполне законченной (и не развивающейся со времен Аристотеля) рассудочной дисциплиной, отвлекающейся от «всего содержания познания» и занимающейся исследованием «только логической формы [знания]» (Кант, 1994, с. 92 (см. с. 71); B 79, B 77—8). В силу этого логика не имеет непосредственного отношения к процессу познания, поэтому исключается Кантом из анализа познания. Однако в посткантовскую эпоху (XX в.) логика благодаря ее революционному преобразованию, прежде всего в работах Г. Фреге и Ч. Пирса (и далее у Б. Рассела и Д. Гильберта и др.), претерпевает существенные изменения, которые концептуально сблизили ее с математикой (как учением о *функциях*; Г. Фреге) и превратили ее, по сути, в *математическую логику* (или *метаматематику*, по Гильберту), что позволяют распространить на нее *mutatis mutandis* кантовскую концепцию конструирования понятий.

Трансцендентальный анализ ее «демонстраций» показывает, что в логике в отличие от остенсивного (геометрического) и символического (алгебраического) конструирования осуществляется *символьно-формализованное* (логическое) *конструирование*, в рамках которого формализуются не только объекты, но и посредством *правил вывода* полный набор допустимых действий с объектами (в ходе построения логических выводов). Это можно рассматривать как следующий после алгебры шаг по символизации (формализации) конструирования: неформальные конструкции (построения) геометрии — полуформальные конструкции (вычисления) алгебры — формальные конструкции (выводы) логики, — а процедура *логического вывода* представляет собой «чистое» (формализованное) математическое действие.

Вместе с тем в логике также активно используются наглядные (остенсивные) — *а-ля* геометрические — конструкции. Так, уже в классической логике крупный математик Л. Эйлер, старший современник И. Канта, стал применять свои «круговые диаграммы». Современная математическая логика конституирована в работах Д. Гильберта. Первоначально созданные им логические системы *гильбертовского типа* представляли собой *а-ля* алгебраические формальные системы с *линейным* понятием вывода (как последовательности формул), поэтому не сильно отличались от символической алгебры. Однако дальнейшее развитие *логики* в XX в., таких ее разделов как *теория доказательств* и, особенно, *теория поиска вывода* (Маслов, 1986), показало, что *логические доказательства* как символические формальные конструкции обладают своей спецификой, что позволяет говорить о том, что в логике осуществляется особый тип конструирования, связанный с учетом при поиске вывода информации о «пространственной» *структуре* логических формул (ср. с «логическим пространством» Витгештейна). «Предметами» логических доказательств выступают *формулы*, которые «растянуты» в пространстве, то есть имеют некоторую *структуру*, содержащую в скрытом виде (металогическую) информацию о доказуемости или недоказуе-

[35] Подобная структурная интерпретация кантовского тезиса о конструировании делает его (Канта) предтечей развивающегося и влиятельного настоящее время *структуралистского* понимания математики (П. Бенацерраф, С. Шапиро, М. Резник и др.).

мости данной формулы. Задача *теории доказательств* (resp. *теории поиска вывода*) как раз и состоит в том, чтобы эту информацию сделать явной, оче—*видной* (как правило, за счет преобразования/ расщепления исходной формулы). Соответственно, в 30-е годы появляются новые более развитые типы логических систем (метаисчисления): *секвенциальные исчисления* и *системы натурального вывода*. В них за счет более сложного конфигурирования (структурирования) «логического пространства» вводятся *нелинейные* понятия вывода: *секвенциальные деревья* и *субординантные натуральные выводы*, что позволяет решить задачу построения вывода логических формул более эффективно (быстро).

* * *

В реальной математической практике (с учетом отмеченной выше тенденции к большей символизации/алгебраизации современной математики) используются и сочетаются различные типы кантовского конструирования. Достаточно наглядной иллюстрацией этого тезиса выступает интуиционистское задание действительного числа (континуума), восходящее к построениям («конструкции») Л.Э.Я. Брауэра. Приведем здесь эту математическую конструкцию в качестве примера. Пусть нам дано некоторое действительное число, которое символически представимо как бесконечная десятичная дробь, например *0,534…*. Следуя Канту, мы должны соотнести этот «символ», или синтаксическое «понятие», с некоторым созерцанием, например с некоторой точкой на отрезке *[0, 1]*. Точнее, собственно остенсивная конструкция задания подобной алгебраической дроби состоит в последовательном разбиении отрезка пополам (1 шаг). При осуществлении подобных разбиений искомое число оказывается либо в правой, либо в левой части полуотрезка: в нашем случае после первого деления *0,534…* окажется в правой половине отрезка, так как оно начинается с цифры 5, после второго деления — в левой правой четверти правой половины, поскольку вторая цифра нашей дроби *0,53…* меньше 5 и т.д. Подобная итерация этой процедуры будет все точнее задавать месторасположение искомого числа. Однако современная математика на этом не останавливается и предлагает заменить «приблизительную» геометрическую конструкцию более строгой алгебраической. Описанную выше процедуру деления отрезка пополам можно строго представить посредством точного (алгебраического) алгоритма.

Закон потока делит кортежи натуральных чисел на допустимые и недопустимые, а дополнительный закон сопоставляет допустимым кортежам некоторые математические объекты. Закон потока должен удовлетворять следующим условиям:

1. Пустой кортеж $<\ldots>$ является допустимым.

2. Для любого допустимого кортежа $<a_1,..., a_n>$ найдется по меньшей мере одно натуральное число k, для которого кортеж $<a_1,..., a_n, k>$ также будет допустимым.

3. Для любого допустимого кортежа $<a_1,..., a_n, k>$ кортеж $<a_1,..., a_n>$ также является допустимым.

Свободно становящиеся последовательности натуральных чисел $\{a_k\}$, для которых при любом n кортеж $<a_1,..., a_n>$ является допустимым по закону потока M, называются допустимыми свободно становящимися последовательностями. Отвечающие им последовательности $\{\Omega\ (a_k)\}$ называются элементами потока M.

Теперь определим отрезок *[0, 1]* как следующий *поток* рациональных отрезков (шаг 2: задание символической алгебраической конструкции):

1. *Закон потока*. Допустимыми по закону потока считаются кортежи, все элементы которых равны *1* или *2*.

2. *Дополнительный закон.* Пустому кортежу ставится в соответствие отрезок *[0, 1]*. Далее, если кортежу <a_1,..., a_n> поставлен в соответствие отрезок *[a, b]*, то кортежу <a_1,..., a_n, 1> ставится в соответствие отрезок *[a, (a + b)/2]*, а кортежу <a_1,..., a_n, 2> — отрезок *[(a + b)/2, b]*.

Элементы этого потока, которые соответствует последовательностям вложенных рациональных отрезков, будут называться (соответствовать) *действительными числами*.

Приведенный алгоритм представляет собой конструктивное задание *понятия* действительного числа, то есть выступает в качестве кантовского конструирования понятий. Однако для того чтобы сделать *понятнее* и *нагляднее* предложенный алгебраический алгоритм потока, интуиционисты соотносят его с *созерцанием* посредством задания вторичной остенсивной конструкции (шаг 3). Это делается в завершающей стадии описания алгоритма следующим образом. Каждый поток может быть представлен двоичным деревом, из каждой вершины которого выходит по меньшей мере одна ветвь, и на каждую вершину которого навешен некоторый математический объект. Допустимые свободно становящиеся последовательности натуральных чисел, то есть бесконечные десятичные дроби, с помощью которых представляются действительные числа, выступают в виде потенциально бесконечных (*конечных* для того или иного шага алгоритма) путей в таком дереве.

* * *

Итоги. **О математике**. Современная математика представляет собой, несмотря на преобладание в ней символически-формальных конструкций, тесное переплетение обоих типов кантовского — *остенсивного* и *символического* — конструирования в рамках математической деятельности. Смысл кантовского *конструирования понятий* состоит в экспликации их содержания посредством общезначимых созерцаний (*схем*), то есть путем помещения их в некую созерцательную *среду*, благодаря чему с ними можно проводить те или иные математические *действия*. При этом мы выделили также третий тип — *логическое конструирование* (доказательств теорем), который наследует черты как геометрического, так и алгебраического конструирования.

О концепции трансцендентального конструктивизма (прагматизма). В данной статье мы на основе кантовского тезиса о математическом «конструировании понятий» развили концепцию *трансцендентального конструктивизма*. При этом мы несколько усилили кантовский тезис. Сам Кант акцентирует свое внимание на чувственно—созерцательном характере математического знания, мы же делаем акцент, опираясь на ряд фрагментов из *Критики*, на *конструировании* как некоторой системе «действий чистого мышления» (B 81; B 153—154), предпосылкой для осуществления которых выступает некая созерцательная «фантазийная» (пространственно-временная) среда. Более того, кантовскую «созерцательность» можно трактовать как *структурность* математического знания (языка), что позволяет говорить об обобщенном «логическом пространстве», а математические конструкции понимать как структурное единство своих элементов. Это позволяет уточнить кантовскую концепцию конструирования и распространить ее на область (математической) логики.

Список литературы

1. *Аристотель.* О душе // Соч. М., 1975. Т. 1.
2. *Винберг Е.* Курс алгебры. М., 2002.
3. *Галилей Г.* Избранные труды : в 2 т. М., 1964. Т. 1.
4. *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М., 1987.
5. *Гильберт Д.* Аксиоматическое мышление // Избранные труды. М., 1998. Т. 1.
6. *Гильберт Д.* Добавление VI «О понятии числа» // Гильберт Д. Основания геометрии М. ; Л., 1948.
7. *Гудстейн Р.Л.* Математическая логика. М., 1961.
8. *Кант И.* Критика чистого разума // Собр. соч. : в 8 т. М., 1994. Т. 3.
9. *Катречко С.Л.* К вопросу об априорности математического знания // Математика и опыт. М., 2003. С. 545—574.
10. *Катречко С. Л.* Моделирование рассуждений в математике: трансцендентальный подход // Модели рассуждений — 1 : Логика и аргументация. Калининград, 2007. С. 63—90.
11. *Катречко С.Л.* Трансцендентальная философия математики // Вестник Московского университета. 2008. Сер. 7 : Философия. №2. С. 88—106.
12. *Катречко С.Л.* Абстрактная природа логико-математического знания и приращение информации // Седьмые Смирновские чтения. М., 2011. С. 176—178.
13. *Катречко С.Л.* Платоновский четырехчастный отрезок (Линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА. 2013. Т. 14, вып. 3. С. 172—177.
14. *Катречко С.Л.* Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. М., 2014a. С. 86—120.
15. *Катречко С.Л.* Математика как «работа» с абстрактными объектами: онтолого-трансцендентальный статус математических абстракций // Математика и реальность : тр. Московского семинара по философии математики. М., 2014b. С. 421—452.
16. *Катречко С.Л.* Трансцендентальный анализ математики: абстрактная природа математического знания // Кантовский сборник. 2015. №2 (52). С. 16—31.
17. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
18. *Койре А.* Очерки по истории философской мысли. М., 1985.
19. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1967.
20. *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М., 1986.
21. *Новоселов М.М.* «Абстракция», «абстрактный объект»: статьи из «Новой философской энциклопедии». URL: http://iph.ras.ru/elib/0019.html (дата обращения: 01.11.2015).
22. *Новоселов М.М.* Логика абстракций (методол. анализ). М., 2000.
23. *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова (ред. В.И. Шалак). М., 2001. С. 417—438.
24. *Фреге Г.* Основоположения арифметики (логико-математическое исследование понятия числа). Томск, 2000.
25. *Хинтикка Я.* Поверхностная информация и глубинная информация // Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 182—228.
26. *Шульпеков В.А.* Инструментальная структура математических построений // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. М., 2014. С. 331—335.
27. *Parsons* Charles. Mathematical Thought and Its Objects. Cambridge Univ. Press, 2008.
28. *Rosen* Gideon Abstract Objects (19.07.2001). URL: http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/ (дата обращения: 01.11.2015).

Об авторе

Сергей Леонидович ***Катречко*** — кандидат философских наук, доцент Школы философии факультета гуманитарных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), skatrechko@hse.ru

A TRANSCENDENTAL ANALYSIS OF MATHEMATICS: THE CONSTRUCTIVE NATURE OF MATHEMATICS

S. Katrechko

Kant's transcendental philosophy (transcendentalism) focuses on both the human method of cognition in general [CPR, B 25] and certain types of cognition aimed at justifying their objective significance. This article aims to explicate Kant's understanding (resp. justification) of the abstract nature of mathematical knowledge (cognition) as the "construction of concepts in intuition" (see: "to construct a concept means to exhibit a priori the intuition corresponding to it"; [CPR, A 713/B 741], which is "thoroughly grounded on definitions, axioms, and demonstrations" [CPR, A 726/B 754]. Unlike specific 'physical' objects, mathematical objects are of abstract nature and they are introduced using Hume's principle of abstraction. Based on the doctrine of schematism, Kant develops an original theory of abstraction: Kant's schemes serve as a means to construct mathematical objects, as an "action of pure thought" [CPR, B 81]. A 'constructive' understanding of mathematical acts going back to Euclid's genetic method is an important innovation introduced by Kant. This understanding is at the heart of modern mathematical formalism, intuitionism, and constructivism. Within Kant's constructivism, mathematics can be described as a two-tier system, which suggests a "shift" from the level of concepts of the understanding to the level of sensual intuition, where mathematical acts are performed, followed by a subsequent return to the initial level. On this basis, the author develops a theory of transcendental constructivism (pragmatism). In particular, Kant's 'intuitionism' of mathematics can be understood as structural properties of mathematical language or its 'logical space' (Wittgenstein; cf. mathematical structuralism). In his theory, Kant distinguishes between two types of constructing — ostensive (geometric) and symbolic (algebraic). The paper analyses these types and shows that modern mathematical structures are a combination and intertwining of both. The author also identifies a third type — logical constructing [in proving theorems], which inherits the features of both Kant's types.

Key words: *Kant's transcendental philosophy (transcendentalism), transcendental constructivism (pragmatism), Kant's theory of mathematical cognition as construction of concepts in intuition.*

References

1. Aristotle, 2011, in: Shiffman, M. *De Anima: On the Soul*, (Newburyport, MA: Focus Publishing.
2. Frege, G. 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau. (English: *The Foundations of Arithmetic: the logical-mathematical Investigation of the Concept of Number*).
3. Galileiy, G, 1964,*Izbrannye trudy* v 2 t. M.: Nauka, 1964. v.1.
4. Galileiy, G., 1987, *Probirnyh del master*. M. Nauka.
5. Gil'bert. D., 1998, *Aksiomaticheskoe myshlenie* //Ego j`e. Izbrannye trudy, T. 1, M. : Faktorial.
6. Gil'bert, D., 1948 *O ponjatii chisla* // Ego j`e. Osnovanija geometrii M.—L., OGIZ.
7. Gudsteiyn,R.L., 1961, *Matematicheskaja logika*. M. : Izd-vo IL.
8. Hintikka, J. 1978, Surface *Information* and Depth *Information*. In: Logico-Epistemologic Research.
9. Kant I., 1994, *Kritika chistogo razuma*. In: Kant I. Sob. soch. v 8-mi tt. V. 3. M.: CHoro.

10. Katrechko, S.L. 2003, *K voprosu ob apriornosti matematicheskogo znanija* [On the question of a priori mathematical knowledge]. In: Matematika i opyt [Mathematics and Experience]. M. : MGU, s. 545—574.

11. Katrechko, S.L. 2007, *Modelirovanie rassuj`deniiy v matematike: transcendental'nyiy podhod* [Modeling reasoning in mathematics: transcendental approach]. In: Modeli rassuj`deniiy — 1 : Logika i argumentacija. Kaliningrad : Izd. RGU im. I. Kanta, 2007. s. 63—90.

12. Katrechko, S.L. 2008, *Transcendental'naja filosofija matematiki* [Transcendental philosophy of mathematics]. In: Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 7 «Filosofija [Philosophy]», №2, 2008. M. : Izd—vo MGU, s. 88—106.

13. Katrechko S.L., 2011, *Abstraktnaja priroda logiko-matematicheskogo znanija i prirashenie informacii.* In: Sed'mye Smirnovskie chtenija. M. : Sovremennye tetradi, s. 176—178.

14. Katrechko, S.L. 2013, *Platonovskiiy chetyrehchastnyiy otrezok (Linija): Platon i Kant o prirode (specifike) matematicheskogo znanija* [Plato's Divided Line: Plato and Kant about the nature (specific) of the mathematics]. In: Vestnik RHGA, T. 14, vyp. 3, 2013. s. 172—177.

15. Katrechko, S.L. 2014a, *Transcendental'nyy analiz matematicheskoy deiatel'nosti: abstraktnye (matematicheskie) ob'ekty, konstrukcii i dokazatel'stva* [Transcendental analysis of mathematics: abstract (mathematical) objects, constructions and proofs]. In: Dokazatel'stvo: ochevidnost', dostovernost' i ubeditel'nost' v matematike [Proof: evidence, credibility and convincing sequences in mathematics. Moscow Study in the Philosophy of Mathematics], Moscow, s. 86—120.

16. Katrechko, S.L. 2014в, *Matematika kak «rabota» s abstraktnymi ob"ektami: ontologo—transcendental'nyiy status matematicheskih abstrakciiy* [Mathematics as a "job" with abstract objects: ontological-transcendental status of mathematical abstractions]. In: Matematika i real'nost' [Mathematics and reality]. Trudy Moskovskogo seminara po filosofii matematiki. M., Izd-vo MGU, s. 421—452.

17. Katrechko S.L., 2015, *Transcendental'nyiy analiz matematiki: abstraktnaja priroda matematicheskogo znanija.* In: Kantovskiiy sbornik [The Kantovsky sbornik], 2015, №2 (52). s. 16—31 (http://journals. kantiana. ru/kant_collection/2017/5885/).

18. Klini S., 1957, *Vvedenie v metamatematiku*, M. : IL.

19. Koiyre A., 1985, *Ocherki po istorii filosofskoiy mysli*, M.

20. Maslov S. JU., 1986, *Teorija deduktivnyh sistem i ee primenenija*. M. : Radio i svjaz'.

21. Lakatos, I. 1976, *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

22. Novoselov M.M., 2000, «Abstrakcija», «abstraktnyiy ob"ekt». In: Novoiy filosofskoiy enciklopedii [The new philosophical encyclopedia]: http://iph. ras. ru/elib/0019.html

23. Novoselov M.M. *Logika abstrakciiy* (metodol. analiz). M. : IFRAN.

24. Parsons, C. 2008, Mathematical Thought and Its Objects, Cambridge Univ. Press.

25. Rosen, G. 2001, *Abstract Objects*; URL: http://plato. stanford. edu/entries/abstract-objects/

26. SHul'pekov V.A., 2014, *Instrumental'naja struktura matematicheskih postroeniiy.* In: Dokazatel'stvo: ochevidnost', dostovernost' i ubeditel'nost' v matematike [Proof: evidence, credibility and convincing sequences in mathematics. Moscow Study in the Philosophy of Mathematics], Moscow, s. 331—335.

27. Smirnov, V.A. 2001, *Geneticheskiiy metod postroenija nauchnoiy teorii* //Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova. M. Editoral URSS, s. 417—438.

28. Vinberg E., 2002, Kurs algebry, M., Faktorial Press.

About the author

Dr *Sergey* ***Katrechko***, Associate Professor, School of Philosophy, Faculty of Humanities, National Research University Higher School of Economics (HSE), skatrechko@hse.ru