ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2, 1971

П О П О В Ю.И.

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ОСНАЩЕНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС Γ_m РАНГА $r = \frac{m}{2}$ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

В работе [3] рассмотрено инвариантное оснащение вырожденных гиперполос ранга $r < m$ проективного пространства $P_n \, (m<n)$ при построении которого используются производные главного фундаментального тензора $\overset{0}{b}_{1ij}$ [4] гиперполосы до четвертого порядка включительно.

В настоящей заметке показывается, что для M-конических развертывающихся гиперполос ранга $r = \frac{m}{2}$ инвариантное Δ-оснащение строится уже с помощью производных тензора $\overset{0}{b}_{1ij}$ не выше третьего порядка. Дано более простое определение инвариантного обобщенного Δ-оснащения гиперполос Γ_m ранга $r = \frac{m}{2}$, не являющихся M-коническими развертывающимися гиперполосами.

При исследовании применяется аналитический аппарат и терминология, введенная в работах [1] - [3].

Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов: $a, d, i, j, k, p, q, s, t, u, v, f, h = 1, 2, \dots, m$; $a_1, d_1, i_1, \dots, h_1 = 1, 2, \dots, r$; $a_2, d_2, \dots, h_2 = r+1, \dots, m$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n+1$. По всем индексам, встречающимся дважды сверху и снизу, предполагается суммирование. Символ „/" вводится для обозначения ковариантного дифференцирования относительно связности Γ_i [4], а относительно связности $\overline{\Gamma}_i$, индуцируемой новым оснащением гиперполосы Γ_m, ковариантное дифференцирование обозначим символом „//". Индексы, участвующие в альтернировании отмечаются чертой снизу. Например, $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{ij}}$.

§ I. Внутреннее Δ-оснащение M-конических развертывающихся гиперполос ранга $r = \frac{m}{2}$.

О п р е д е л е н и е I. Развертывающаяся гиперполоса Γ_m, все плоские образующие которой имеют общую $(m-r-1)$-мерную плоскость (вершину гиперполосы), называется M-конической [3], §I.

Как известно [3], §3, инвариантные обобщенные оснащения (α, β) (Ω-оснащения (α, β)) M-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m ранга $r < m$ характеризуются условиями:

$$K_i = \frac{1}{m+2} \overset{0}{b}_{1ij/k} \, b^{1jk}_0 = 0, \tag{1}$$

$$\Omega^1_{op} = \alpha \mathcal{L}^1_{op} + \beta B^1_{op} + \alpha S^1_{op} = 0, \tag{2}$$

$$\left| \alpha (r+2) \ell_{k_1 t_1} + (\alpha - \beta) J^1_0 \, \overset{0}{b}_{1k_1t_1} \right| \neq 0, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}^1_{op} = \overset{0}{b}_{1ij/kt} \, \overset{0}{b}_{1uv/p} \, b^{1iu}_0 \, b^{1jv}_0 \, b^{1kt}_0 , \tag{4}$$

$$B^1_{op} = \overset{0}{b}_{1ij/kp} \, \overset{0}{b}_{1uv/t} \, b^{1iu}_0 \, b^{1jv}_0 \, b^{1kt}_0 , \tag{5}$$

$$S^1_{op} = \overset{0}{b}_{1ij/pk} \, \overset{0}{b}_{1uv/t} \, b^{1iu}_0 \, b^{1jv}_0 \, b^{1kt}_0 , \tag{6}$$

$$\ell_{kt} = \overset{0}{b}_{1ij/k} \, \overset{0}{b}_{1pq/t} \, b^{1ip}_0 \, b^{1jq}_0 , \tag{7}$$

$$J_o^1 = \ell_{kt}\, b_o^{1kt}, \qquad (8)$$

α,β -произвольные действительные числа (характеристические параметры), не равные одновременно нулю.

Симметрический тензор b_o^{1ij} определяется соотношениями:

$$b^o_{1ij}\, b_o^{1jk} = \Delta_i^k, \qquad (9)$$

где Δ_i^k — К-тензор типа $\left\{ {0 \atop 1} \right\}$ *), т.е.

$$\Delta^K_{i_2} = 0, \ \Delta^{K_1}_{i_1} = \delta^{K_1}_{i_1}, \ \Delta^{K_2}_{i_1} \text{ -произвольные функции от } x^i. \qquad (10)$$

Фиксированным характеристическим параметрам (α,β) соответствует определенное Ω -оснащение (α,β), не зависящее от исходного выбора Δ^i_j и от произвола $b_o^{1i_2j_2}$. Причем оснащения, индуцирующие одно и то же внутреннее обобщенное оснащение (α,β), отличаются друг от друга только положением нормалей первого рода во внутренних нормальных плоскостях P_{n-r} [3].

Итак, будем предполагать, что все рассматриваемые в дальнейшем оснащения m -конической развертывающейся гиперполосы ранга $r = \frac{m}{2}$ являются Ω -оснащениями (α,β).

Построим нормали первого рода во внутренних $(n-r)$ мерных нормальных плоскостях P_{n-r} данной гиперполосы. Для этой цели введем в рассмотрение тензор

$$\Pi^{111a}_{ooo} = b^o_{1ij/kpq}\, b^o_{1su/v}\, b^o_{1fh/d}\, b_o^{1is}\, b_o^{1jf}\, b_o^{1pu}\, b_o^{1qh}\, b_o^{1vd}\, b_o^{1ka}. \qquad (11)$$

Компоненты $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ этого тензора не зависят от выбора $b_o^{1i_2j_2}$, так как

$$b^o_{1ij_2/kf\dots s} = 0^{**)} \qquad (12)$$

Отсюда следует, что подтензор $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ вполне определен заданием

*) О К-тензорах см. [2], § I.

**) См. [3], §3, стр.40.

тензора Δ^i_j.

При переходе от одного Ω - оснащения (α,β) к другому подтензор $\Pi^{111a_1}_{ooo}$ меняется по закону:

$$\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = \Pi^{111a_1}_{ooo} + \psi_o^{1t_2}\left(J_o^1\, b_o^{1ka_1} S_{kt_2} + 2\ell_{pk}\, b_o^{1ip}\, b_o^{1ka_1} S_{it_2}\right). \qquad (13)$$

Далее, из леммы [3.3] и соотношения

$$b^o_{1ij/kt_2} = b^o_{1ij} S_{kt_2} + b^o_{1ik} S_{jt_2} + b^o_{1jk} S_{it_2}$$

работы [3], § 3 следует, что $S_{k_2t_2} = 0$, а из соотношений (I2), (7),(8), получаем, что $\ell_{t_2j} = 0$. Таким образом, в равенстве (I3) выражение в скобках не зависит от компонент $b_o^{1ij_2}$ тензора b_o^{1ij}.

С другой стороны, в силу теорем [3.2] и [3.6] работы [3], это выражение является инвариантом Ω -оснащений (α,β) m-конической развертывающейся гиперполосы Γ_m ранга $r < m$.

Потребуем, чтобы для нового Ω-оснащения (α,β) имело место равенство $\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = 0$. Тогда мы получаем следующую систему уравнений относительно компонент $\psi_o^{1t_2}$:

$$\Pi^{111a_1}_{ooo} + \psi_o^{1t_2}\left(J_o^1\, b_o^{1ka_1} S_{kt_2} + 2\ell_{pk}\, b_o^{1ip}\, b_o^{1ka_1}\right) = 0. \qquad (14)$$

При $r = \frac{m}{2}$ матрица

$$\left\| J_o^1\, b_o^{1ka_1} S_{kt_2} + 2\ell_{pk}\, b_o^{1ip}\, b_o^{1ka_1} \right\| \qquad (15)$$

-квадратная.

Если матрица (I5) невырожденная, то система (I4) имеет одно и только одно решение, т.е. оснащение, удовлетворяющее условию

$$\bar{\Pi}^{111a_1}_{ooo} = 0, \qquad (16)$$

существует. Причем, как видно из (I4), двух таких оснащений построить нельзя.

Выделив теперь с помощью гиперплоскостей $\bar{N}^{1t_2}_\alpha = N^{1t_2}_\alpha + \psi_o^{1t_2} T^o_\alpha$ нормали первого рода во внутренних $(n-r)$ -мерных нормальных плоскостях $P_{n-\tau}$,мы получаем инвариантное Δ-оснащение $(\alpha,\beta,\Pi)^*$ m-конической развертывающейся гиперполосы ранга $\tau=\frac{m}{2}$.Отсюда следует

Т е о р е м а I. Для всякой m-конической развертывающейся гиперполосы ранга $\tau=\frac{m}{2}$,на которой Ω-оснащение индуцирует невырожденную матрицу (I5),существует инвариантное Δ-оснащение (α,β,Π) ,удовлетворяющее условию [I6].

§ 2. Инвариантное обобщенное Δ-оснащение вырожденной гиперполосы Γ_m ранга $\tau=\frac{m}{2}$,не являющейся m-конической развертывающейся гиперполосой.

О п р е д е л е н и е 2. Оснащение,для которого тензор (I

равен нулю,называется полувнутренним Δ-оснащением вырожде

ной гиперполосы Γ_m [3],§3 .

Пусть рассматриваемые в дальнейшем оснащения гиперполос Γ_m являются полувнутренними Δ-оснащениями,которые не зависят от произвола $b_0^{1i_2j_2}$,но зависят от выбора тензора Δ_j^i [3],§3.

Покажем,что можно упростить построение инвариантного обобщенного Δ-оснащения (I)-(3) для данного класса гиперполо

Составим тензор

$$K_{op}^1=B_{op}^1-S_{op}^1 , \qquad (17)$$

где B_{op}^1 и S_{op}^1 —тензоры,определяемые соотношениями (5),(6).

Тогда подтензор K_{op_2} этого тензора (I7) можно представить в виде:

$$K_{op_2}^1=\overset{\circ}{b}_{1ij/kp_2}\overset{\circ}{b}_{1uv/q}\,b_0^{1iu}\,b_0^{1vj}\,b_0^{1qk}-\overset{\circ}{b}_{1ij/p_2k}\overset{\circ}{b}_{1uv/q}\,b_0^{1iu}\,b_0^{1jv}\,b_0^{1qk}=$$

$$=3\,\overset{\circ}{b}_{1i_2j_1/k_1p_2}\overset{\circ}{b}_{1u_2v_1/q_1}\,b_0^{1u_2i_2}\,b_0^{1v_1j_1}\,b_0^{1q_1k_1}-$$

$$-2\,\overset{\circ}{b}_{1i_2j_1/p_2k_1}\overset{\circ}{b}_{1u_2v_1/q_1}\,b_0^{1i_2u_2}\,b_0^{1j_1v_1}\,b_0^{1k_1q_1}-$$

$$-\overset{\circ}{b}_{1i_1j_1/p_2k_2}\overset{\circ}{b}_{1u_1v_1/q_2}\,b_0^{1i_1u_1}\,b_0^{1j_1v_1}\,b_0^{1k_2q_2}+Q , \qquad (18)$$

де Q —сумма членов ,не содержащих компонент $b_0^{1i_2j_2}$ тензора b_0^{1ij} .

Прежде всего покажем,что подтензор $K_{op_2}^1$ не зависит от произ-

ола $b_0^{1ij_2}$,т.е. вполне определяется заданием тензора $\overset{\circ}{\Delta}{}_j^i$.

Действительно,из тождества Риччи для тензора $\overset{\circ}{b}_{1ij}$:

$$\overset{\circ}{b}_{1ij/\underline{kf}}=-R_{okf}^{o}\,\overset{\circ}{b}_{1ij}+R_{1kf}^{1}\,\overset{\circ}{b}_{1ij}+R_{ikf}^{s}\,\overset{\circ}{b}_{1sj}+R_{jkf}^{s}\,\overset{\circ}{b}_{1is}$$

олучаем,что

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/\underline{kf}}=\overset{\circ}{R}{}_{i_2kf}^{s}\,\overset{\circ}{b}_{1sj}$$

ли

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/fk_2}=\overset{\circ}{b}_{1i_2j/k_2f}-R_{i_2k_2f}^{s_1}\,\overset{\circ}{b}_{1s_1j} . \qquad (19)$$

силу уравнения Гаусса [4],§2,соотношение (I9) приводится окончательно к виду

$$\overset{\circ}{b}_{1i_2j/fk_2}=\overset{\circ}{b}_{1i_2j/k_2f}-p_{i_2k_2}\,\overset{\circ}{b}_{1jf} . \qquad (20)$$

аконец,подставив (20) в (I8) и учитывая соотношения (I) и $\overset{\circ}{b}_{1ij/k_2}\Delta_t^i=\overset{\circ}{b}_{1tj/k_2}$,приходим к равенству

$$K_{op_2}^1=Q ,$$

что и доказывает независимость подтензора $K_{op_2}^1$ от произвола $b_0^{1i_2j_2}$.

С другой стороны,при переходе от одного полувнутреннего оснащения к другому имеем:

$$\bar{B}^1_{op_2} = B^1_{op} - 3\psi_0^{1t_1}\ell_{p_2 i}\Delta^i_{t_1},$$

$$\bar{S}^1_{op_2} = S^1_{op_2} - 3\psi_0^{1t_1}\ell_{p_2 i}\Delta^i_{t_1} + \quad (2$$

$$+ 2\psi_0^{1t_1} b^0_{1t_1 j/p_2} b^0_{1uv/q}\Delta^u_K b_0^{1jv} b_0^{1Kq}.$$

В силу (21) подтензор $K^1_{op_2}$ преобразуется при изменении полувнутренних оснащений по закону:

$$\bar{K}^1_{op_2} = K^1_{op_2} - 2\psi_0^{1t_1} b^0_{1t_1 j_1/p_2} b^0_{1uv/q}\Delta^u_{K_1} b_0^{1jv} b_0^{1K_1 q}. \quad ($$

Учитывая, что при $\tau = \frac{m}{2}$ матрица

$$\| b^0_{1t_1 j_1/p_2} b^0_{1uv/q}\Delta^u_{K_1} b_0^{1jv} b_0^{1K_1 q} \| \quad ($$

квадратная, приходим к выводу: система (22) имеет единственно решение, если матрица (23) невырожденная.

Т е о р е м а 2. Для всякой вырожденной гиперполосы Γ_m ранга $\tau = \frac{m}{2}$ (не являющейся M-конической развертывающейся гиперполосой), на которой полувнутреннее Δ-оснащение индуци рует невырожденную матрицу (23), существует инвариантное обоб ное Δ-оснащение, удовлетворяющее условию

$$K^1_{op_2} = 0.$$

Следует отметить, что проведенные рассуждения не проходят случае, когда базисной поверхностью гиперполосы служит гипер верхность второго порядка, а также для вырожденных развертыв ся гиперполос ранга один. Для этих гиперполос полувнутренне оснащение, как легко показать, индуцирует нулевой тензор b^0_{1ij}

Применяя полученную теорию к частному виду вырожденных г полос-к гиперповерхностям $\Gamma_{n-1} (m=n-1)$, мы приходим к результат

боты [2], § 4.

Л и т е р а т у р а

Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. Ученые зап. МГПИ им. В.И.ЛЕНИНА, т.108, вып.2, 1957, 3-44.

Атанасян Л.С. и Воронцова И.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. Ученые записки МГПИ им. В.И.ЛЕНИНА, 1965, 243, 5-28.

Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. I (Труды Калининградского университета), 1970, 27-63.

Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. Ученые зап. МГПИ им. В.И.ЛЕНИНА, 374, т.I, Вопросы Дифференциальной геометрии, 1970, стр. 102-117.