3. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

4. *Христофорова А. В.* Двойственная геометрия регулярной гиперповерхности в пространстве аффинной связности. Чебоксары, 2011.

5. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

A. Khristoforova

Normal connections on the hypersurface equipment in sense Norden — Cartan in the space of affine connection

This work is devoted to the geometry of normal connections induced by the equipment in sense Norden — Cartan of hypersurface in the space of affine connection.

УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

К геометрии каналовой поверхности

В евклидовом пространстве рассматривается каналовая поверхность. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: каналовая поверхность, сфера, циклида Дюпена.

Каналовая гиперповерхность исследуется как гиперповерхность, которая является огибающей однопараметрического семейства гиперсфер [1, с. 379; 2].

Обозначим через $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой γ — геометрического места центров семейства, $R(s)$ — радиус соответствующей гиперсферы (s — длина дуги кривой γ). Уравнение семейства гиперсфер запишется в виде

$$(r-\rho)^2 = R^2. \tag{1}$$

Характеристика семейства — (n – 2)-сфера — есть пересечение гиперсферы (1) и гиперплоскости

$$(r-(\rho - RR'\tau),\tau) = 0. \tag{2}$$

Центр этой (n – 2)-сферы есть

$$C = \rho - RR'\tau\ , \tag{3}$$

где τ — орт касательной к линии центров.

Радиус (n – 2)-сферы $\tilde{R}$ равен

$$\tilde{R} = R\sqrt{1-R'^2}\ . \tag{4}$$

Для того чтобы огибающая была вещественной гиперповерхностью, необходимо выполнение неравенства

$$1 - R'^2 \ge 0\ . \tag{5}$$

Обозначим через $e(v_1,...,v_{n-2})$ орт (n – 2)-мерной характеристики. В силу (2) $(e,\tau\} = 0$. Уравнение каналовой гиперповерхности примет вид

$$r(u,v) = \rho(u) - R(u)R'(u)\tau(u) + \tilde{R}(u)e(v_1,...v_{n-2})\ . \tag{6}$$

Пример 1. Линяя центров — винтовая линия в E^3.

Обозначим через ν,β орты главной нормали и бинормали кривой γ. Тогда уравнение каналовой поверхности запишется в виде

$$r(u,v) = \rho(u) - R(u)R'(u)\tau(u) + \tilde{R}(u)(\cos(v)\nu(u) + \sin(v)\beta(u)).$$

Имеем

$$\rho(u) = (\cos(u),\sin(u),u)\ ,\ \tau(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(u),\cos(u),1)$$

$$\beta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(u),-\cos(u),1)\ ,$$

$$\nu = [\beta,\tau] = (-\cos(u),-\sin(u),0)\ .$$

Пусть $R(u) = au + d$. При условии (5) можно положить $c = d = \dfrac{1}{2}$. Тогда $R = \dfrac{u+1}{2}$, $RR' = \dfrac{u+1}{4}$, $a = \dfrac{(u+1)\sqrt{3}}{4}$.

Используя математический пакет *Maple* [3], построим каналовую поверхность, линию центров (винтовую) и сферу с центром на винтовой линии, полагая $u = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 1, 2).

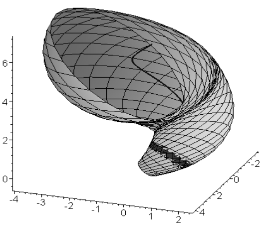

Рис. 1. Каналовая поверхность, линяя центров, характеристика

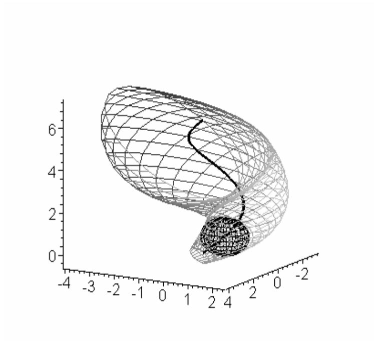

Рис. 2. Каналовая поверхность, линяя центров, сфера

Пример 2. Циклиды Дюпена [1, с. 381; 2] в E^3 — это дважды каналовые поверхности, для которых линии центров C_1, C_2 семейства сфер есть фокальные кривые γ_1, γ_2 второго порядка, расположенные в ортогональных плоскостях.

Рассмотрим случай, когда кривая γ_1 представляет собой эллипс, а кривая γ_2 — гиперболу (рис. 3). Зададим эти кривые.

$$C_1 : \rho_1(u) = (b\sin(u), 0, a\cos(u)), b = \sqrt{a^2 - c^2};$$
$$C_2 : \rho_2(u^*) = (0, b\sinh(u^*), c\cosh(u^*)).$$

Каналовую поверхность (рис. 4) ищем в виде

$$r(u,v) = \rho_1(u) - R_1(u)R_1'(u)\tau(u) + \tilde{R}_1(u)(\cos(v)\nu(u) + \sin(v)\beta(u)),$$

где

$$\tau(u) = (b\cos(u), 0, -a\sin(u));$$
$$\nu(u) = (-a\sin(u), 0, -b\cos(u)), \beta(u) = (0,1,0).$$

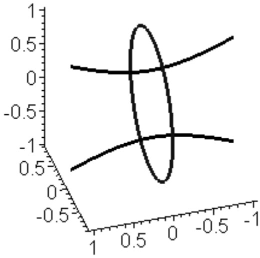

Рис. 3. Фокальные кривые: эллипс, гипербола

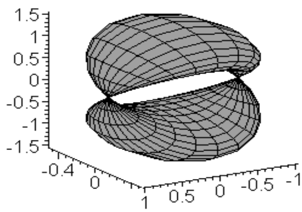

Рис. 4. Каналовая поверхность

Для нахождения $R_1(u)$ потребуем, чтобы сферы с центрами C_1, C_2 и радиусами $R_1(u), R_2(\widehat{u})$ соответственно касались (рис. 5—8).

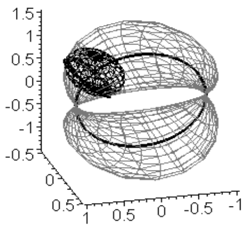

Рис. 5. Каналовая поверхность, сфера, $u = \dfrac{\pi}{4}$

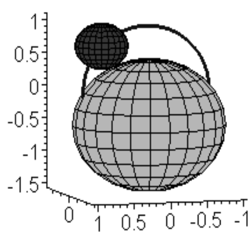

Рис. 6. Внешнее касание сфер

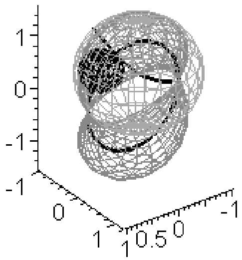

Рис. 7. Каналовая поверхность и сферы (внутреннее касание)

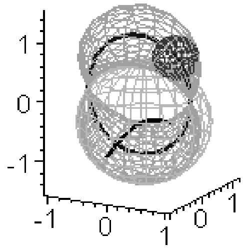

Рис. 8. Каналовая поверхность и сферы (внешнее касание)

Имеем $(\rho_1(u)-\rho_2(u^*),\rho_1(u)-\rho_2(u^*))=(R_1(u)\pm R_2(u^*))^2$, или $c\cos(u)\pm a\cosh(u^*)=R_1(u)+R_2(u^*)$. Откуда $R_1(u)=c\cos(u)+d$, $R_2(u^*)=\pm a\cosh(u^*)-d(d=const)$.

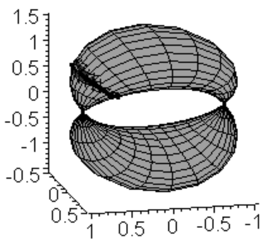

Рис. 9. Поверхность и характеристика

Используя ограничение (5) на $R_1(u)$, находим $c^2\le 1,\ a^2>c^2$. Полагая $c=\dfrac{1}{2},\ a=1,\ d=0$, построим поверхность

$$r(u,v)=r_1(u)-R_1(u)R_1'(u)t(u)+ \\ +\tilde{R}_1(u)(\cos(v)n(u)+\sin(v)b(u)),$$

где $\tilde{R}_1=R_1\sqrt{1-R_1'^2}$ (рис. 9),

сферу с центром $\rho_1=\rho_1(\dfrac{\pi}{4})$ на эллипсе радиуса $R_1=R_1(\dfrac{\pi}{4})$ (рис. 6), сферы с центрами $\rho_2=\rho_2(\dfrac{\pi}{4})$ на ветвях гиперболы с радиусами $R_2=R_2(\dfrac{\pi}{4})$ (рис. 7, 8).

Чтобы нагляднее определить касание сфер, центры которых расположены на гиперболе, с каналовой поверхностью, рассмотрим пересечение сферы и каналовой поверхности с плоскостью

$$x\, t_1(\frac{1}{2}) + (y - b sh(\frac{1}{2}) t_2(\frac{1}{2}) + (z - c\cos(\frac{1}{2}) t_3(\frac{1}{2}) + a^2 ch(\frac{1}{2}) sh(\frac{1}{2}) = 0,$$

где $t = (t_1, t_2, t_3)$ — орт касательной к гиперболе. Имеем рисунки (рис. 10, 11).

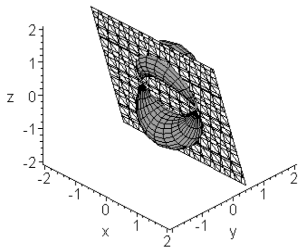

Рис. 10. Характеристика на каналовой поверхности

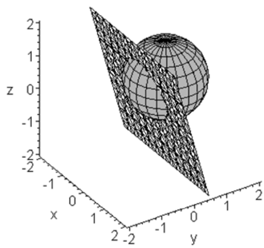

Рис. 11. Характеристика на сфере

Список литературы

1. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

2. *Чешкова М. А.* К геометрии дважды каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Математические труды. 2003. Т. 6, №11. С. 169—181.

3. *Васильев А. Н.* Maple 8. М. ; СПб. ; Киев, 2003.

M. Cheshkova

To geometries of kanal surface

In Euclidean space kanal surface is studied. In the process of study system computer mathematics *Maple* is used.