вых пространств, так и его гипотетический аналог для аффинносвязного случая, о котором в [6] также упомянуто.

Работа поддержана РФФИ (проект № 96-01-00215).

Библиографический список

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // ДАН СССР. 1991. Т.320. №3. С.531-535.
2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование I // Изв. вузов. 1992. №6. С.63-70.
3. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. II // Там же. 1994. №10. С.26-32.
4. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. III // Там же. 1995. №5. С.39-50.
5. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig: Teubner. 1893. Bd.3. 830 s.
6. *Аминова А.В.* Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений. - Казанский ун-т. Казань, 1991. - 18 с. Деп. в ВИНИТИ 22.04.91, №1707 - В91.

V.A. I g o s h i n

POINT INFINITESIMAL SYMMETRIES OF PULVERIZATION

By means of pulverization (geodesic) modelling method, which developed by author, it is found some geometrical criterion's of point infinitesimal symmetries of pulverization (or, that one and the same, geodesic flow of generalized affine connection).

ÓÄÊ 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (II)

V.V. K a i s e r

(Friedrich-Alexander-Universität Erlanger-Nürnberg)

Ein analytischer Apparat ist umgescchrieben, der Resultaten, die im ersten Teil der Arbeit [1] formulieren sind, erlaubt zu erhalten hat.

2. *Der analytische Apparat* Hier werden die Grundbegriffe der geradlinigen Differentialgeometrie aus moderner Sicht erwähnt.

2.1. ***Derivationsformel und Strukturgleichungen***. Es sei P^3 ein dreidimensionaler projektiver Raum und M sei die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit aller Geraden in P^3. Man ordnet jedem Element $l \in M$ ein projektives 4-Bein $A_i \in V = R^4$ (i=0,1,2,3) mit entsprechenden geometrischen Punkten $a_i = \{\lambda A_i : \lambda \in R\} \in P^3$, so daβ die Punkte a_1, a_2 auf der Gerade l liegen. Daraus bekommen wir die glatten Abbildungen[1] A_i: $M \to V$, die das sogenannte begleitende 4-Bein der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M bilden. Es sei $dA_i\big|_l : T_l M \to T_{A_i(l)} V \cong V$ ihr Differential im Punkt $l \in M$. Für jedes Element u des tangentiellen Raumes $T_l M$ der Mannigfaltigkeit M im Punkt l wird dann sein Bild $dA_i\big|_l(u)$ auf $T_l M$, das durch die Formel $dA_i\big|_l(u) = \sum_{i=0}^{3} \omega_i^j\big|_l(u) A_j(l)$ wohlbestimmt ist, die glatten Differential-formen ω_i^j auf der Mannigfaltigkeit M bestimmen. Damit sind die Differentiale

$$dA_i = \sum_{i=0}^{3} \omega_i^j A_j \tag{2.1}$$

als Differentialformen auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit den Werten im Raum V bestimmt. Da A_i die 0-Formen auf M mit den Werten in V sind, gilt $dA_i = \sum_{i=0}^{3} \omega_i^j A_j = \sum_{i=0}^{3} \omega_i^j \wedge A_j$, wo $\wedge$ das Zeichen der äuβeren Multiplikation [2] bedeutet. Deswegen gilt nach der Formel (2.1) (vgl. [2])
$0 = d^2 A_i = \sum_{j=0}^{3} \left(d\omega_i^j \wedge A_j - \omega_i^j \wedge dA_j \right) = \sum_{j=0}^{3} \left(d\omega_i^j - \sum_{k=0}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \right) A_j$. Daraus folgt, daβ die Differentialformen ω_i^j auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M, die in den Derivationsformeln (2.1) auftreten, die sogenannten Strukturgleichungen des prrrojektiven Raumes

$$d\omega_i^j = \sum_{k=0}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{2.2}$$

erfüllen.

2.2. ***Plücker'sche Übertragung.*** Es seien x, y zwei beliebige Punkte auf einer Geraden $l \in M$ und X, Y seien entsprechende analytische Punkte im Raum $V = R^4$, so daβ $x = \{\lambda X \mid \lambda \in R, \lambda \neq 0\}$, $y = \{\lambda Y \mid \lambda \in R, \lambda \neq 0\}$. Dann ist die schifsymmetrische bilineare Funktion $X \wedge Y$: $V^* \times V^* \to R$, die nach der Formel

$$X \wedge Y(\omega, \theta) = \det \begin{Vmatrix} \omega(X) & \omega(Y) \\ \theta(X) & \theta(Y) \end{Vmatrix}$$

[1] Diese Abbildungen werden natürlich nur in einer Umgebung des Elements $l \in M$ glatt definieren. Dies macht den Charakter der Betrachtungendieses Artikels lokal. Deswegen wird es weiter im Artikel angenommen, daβ unsere Betrachtungen nur auf diese (oder wenn es nötig wird auf eine noch klenere) Umgebung eines Elementes $l \in M$ beschränkt werden.

definiert wird, ein Element der äußeren Potenz $\wedge^2 V \cong R^6$. Es ist leicht zu berechnen, daβ das äuβere Produkt X∧Y nach dem Ersetzen der Punkte x und y durch andere Punkte x' und y' derselben Gerade l mit der Determinante der Übergangsmatrix von den Vektoren X, Y zu den Vektoren X', Y' multipliziert wird. Man bezeichnet π: $R^6 \to P^5$ die kanonische Abbildung des Raumes R^6 in den 5-dimensionalen projektiven Raum P^5. Dann wird der Punkt $\pi(X\wedge Y)\in P^5$ durch die Angabe der Gerade $l\in M$ eindeutig bestimmt. Die Abbildung $M\to P^5$: $l\mapsto \pi(X\wedge Y)$ heiβt die Plücker'sche Übertragung. In den homogenen Koordinaten wird sie folgenderweise berechnet. Es seien (x^0, x^1, x^2, x^3) und (y^0, y^1, y^2, y^3) die homogenen projektiven Koordinaten von Punkten x und y einer Gerade $l\in M$ in bezug auf die Basis A_0, A_1, A_2, A_3 des Raumes $V \cong R^4$ (der analytischen Punkte). Dann gilt für $X = \sum_{i=0}^{3} x^i A_i$, $Y = \sum_{i=0}^{3} y^i A_i$

$$X\wedge Y=\sum_{i<j} p_{ij} A_i \wedge A_j = p_{01}B_0+p_{02}B_1+p_{03}B_2+p_{12}B_3+p_{31}B_4+p_{23}B_5,$$

wo die homogenen Plücker'schen Koordinaten p_{ij} der Gerade l nach den Formen

$$p_{ij}=x_i y_j - x_j y_i \quad (i,j=0,1,2,3)$$

definiert werden, und die Vektoren

$$B_0=A_0\wedge A_1,\ B_1=A_0\wedge A_2,\ B_2=A_0\wedge A_3,$$
$$B_3=A_1\wedge A_2,\ B_4=A_3\wedge A_1,\ B_5=A_2\wedge A_3$$

eine Basis des Raumes R^6 bilden. Auf der offensichtlichen Gleichheit

$$0=(X\wedge Y)\wedge(X\wedge Y)=2(p_{01}p_{23}+p_{02}p_{13}+p_{03}p_{12})A_0\wedge A_1\wedge A_2\wedge A_3$$

folgt, daβ alle Punkte des projektiven Raumes P^5, die den Geraden des Raumes P^3 nach der Plücker'schen Übertragung entsprechen, die Plücker'sche Hyperquadrik Q_4^2 bilden, die im Raum P^5 mit Hilfe von der Gleichung

$$p_{01}p_{23}+p_{02}p_{13}+p_{03}p_{12}=0$$

bestimmt wird. Die Plücker'sche Übertragung bildet die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit M auf diese Plücker'sche Quadrik Q_4^2 diffeomorph ab.

2.3. ***Basis des Rings von Differentialformen***. **Lemma 2.1.** Es sei A_i (i=0, 1, 2, 3) ein wie oben im Punkt 2.1 gewähltes begleitendes 4-Bein der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M, die Punkte A_0 und A_1 dessen die laufende Gerade $l\in M$ bestimmen. Dann sind die Differentialformen

$$\Omega^1 = \omega_1^2, \Omega^2 = \omega_1^3, \Omega^3 = -\omega_0^2, \Omega^4 = \omega_0^3 \tag{2.3}$$

in jedem Punkt $l\in M$ linear unabhängig und bilden eine Basis des kotangentialen Raumes $T_l^* M$ der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M. *Beweis*. Da A_i die differentiellen 0-Formen auf der Mannigfaltigkeit M mit der Werten im Raum $V \cong R^4$ sind, sind die $A_i\wedge A_j$ die 0-Fermen auf M mit den Werten in $\wedge^2 V \cong R^6$. Dann bakommen wir nach der bekannten Regel [2] der äuβeren Differentierung des äuβeren Produktes von zwei Differentialformen [2] mit der Verwendung der Formel (2.1):

$$dB_0 = d(A_0 \wedge A_1) = dA_0 \wedge A_1 + A_0 \wedge dA_1 =$$
$$= (\omega_0^0 + \omega_1^1) B_0 + \omega_1^2 B_1 + \omega_1^3 B_2 - \omega_0^2 B_3 + \omega_0^3 B_4 .$$

Dies bedeutet, daβ die Hyperebene Spann(B_0, B_1, B_2, B_3, B_4) den Tangentiellen Raum der Plücker'schen Quadrik Q_4^2 im Punkt B_0 darstellt. Daraus folgt auch, daβ die formen ω_1^2, ω_1^3, ω_0^2, ω_0^3 in jedem punkt $l \in M$ linear unabhängig sind und eine Basis des kotangentiellen Raumes $T_l^* M$ der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M bilden. Das beendet den Beweis des Lemmas. Aus Diesem Lemma folgt, daβ jede beliebige Regelfläche mit Hilfe von einem Differentialsystem $\frac{\Omega^1}{\lambda^1} = \frac{\Omega^2}{\lambda^2} = \frac{\Omega^3}{\lambda^3} = \frac{\Omega^4}{\lambda^4}$, oder, kurz geschrieben, mit Hilfe vom System

$$\Omega^i = \theta \lambda^i, \quad (i=1,2,3,4) \tag{2.4}$$

als eine Integralkurve einer 1-dimensionalen Distribution auf M bestimmt werden kann, wo λ^i glatte Funktionen auf M sind und θ eine glatte differentielle 1-Form auf M ist.

Literatur

1. *Kaiser V. V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (I) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1997. Вып. 28. С. 38-47.

2. *Spivak M.* A comprehensive introduction to differential geometry. Boston, 1970. Vol.1.

В.В. Кайзер

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ(II)

Описан аналитический аппарат, позволивший получить результаты, сформулированные в первой части работы [1].

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА И РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВ

Г.В. К у з н е ц о в

(Тульский государственный педагогический университет)