ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХ КЛАССОВ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(CL)_{1,2}$

В [3] в трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривались вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур $\{C,L\}$, где C – эллипс, L – прямая, не инцидентная плоскости эллипса. Каждому эллипсу C в этом случае соответствует одномерное подмногообразие $(L)_c$ прямых L конгруэнции (L).

Исследованы конгруэнции $(CL)_{1,2}$, у которых все коники C инцидентны одной квадрике F (конгруэнции Q). Выделены два класса конгруэнций Q (Q_1 и Q_2), включающих в себя соответственно классы конгруэнций с осевой аффинной симметрией и центральной аффинной симметрией [2].

Для конгруэнций Q_1 и Q_2 получена полная совокупность свойств, позволяющая осуществить безынтегральное представление этих конгруэнций [I].

§I. Геометрические свойства вырожденных конгруэнций Q_1 и Q_2

Канонический репер $R=\{A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$ конгруэнции Q геометрически характеризуется следующим образом: начало A репера помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью эллипса C, конец вектора $\vec{e}_3$ совмещается с центром эллипса, направление вектора $\vec{e}_2$ сопряжено с направлением вектора $\vec{e}_3$ и точка $\vec{E}=\vec{A}+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ инцидентна эллипсу, вектор $\vec{e}_1$ направлен по прямой L.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией Q_1 (Q_2) называется торсовая характеристическая конгруэнция Q [2, с.209],

у которой: I/ торсы $(L)_c$ являются коническими поверхностями; 2/ выполняются условия $m=0,\ n+1\neq 0$, ($m\neq 0,\ n+1=0$).

Конгруэнции Q_1 и Q_2 в репере R определяются соответственно системами дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=0,\ \omega_2^1=0,\ \omega_3^1=0,\ d\ln b=2(\alpha-\beta)\omega^1,\ b\omega_2^3=\omega^2,\\ &\omega_3^2=-\omega^2,\ \omega_2^2=\beta\omega^1,\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\omega^1,\ \omega_1^2=\alpha\omega^2,\ \omega_3^3=\alpha\omega^1,\\ &d\alpha=\alpha(\omega_1^1-\omega_3^3)-\omega_1^3,\ d\beta=\beta[-2\omega_2^2+\omega_1^1],\ d\Gamma_{11}^3\wedge\omega^1=0;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=0,\ db=0,\ b\omega_2^3=\omega^2,\ \omega_3^1=-\omega^1,\ \omega_2^1=m\omega^1,\ \omega_2^2=0,\\ &\omega_1^2=-bm\Gamma_{11}^3\omega^1-\alpha\omega^2,\ \omega_3^2=-bm\alpha\omega^1-\omega^2,\ \omega_1^3=\Gamma_{11}^3\omega^1,\\ &\omega_3^3=\alpha\omega^1,\ d\alpha=0,\ d\Gamma_{11}^3=0,\ [dm+(m^2+\tfrac{1}{b})\omega^2]\wedge\omega^1=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(ω^i, ω_i^j – компоненты инфинитезимального перемещения репера) с произволом одной функции одного аргумента.

Уравнения эллипса C в репере R имеют вид:

$$f\equiv b(x^3-1)^2+(x^2)^2-1=0,\quad x^1=0.\qquad(3)$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции Q_1 характеризуются следующими свойствами: I/ квадрика F

$$b(x^3-1)^2+(x^2)^2+b\alpha^2(x^1)^2-2b\alpha x^1x^3+2(b\alpha-\beta)x^1-1=0,\qquad(4)$$

содержащая эллипсы C, является эллиптическим параболоидом; 2/ диаметр параболоида

$$1-x^3+\alpha x^1=0,\quad x^2=0,\qquad(5)$$

проходящий через центр эллипса C и фокальную точку $\vec{F}=\vec{A}-\frac{1}{\alpha}\vec{e}_1$ луча L прямолинейной конгруэнции (L), неподвижен; 3/ плоскости $\{A\vec{e}_1\vec{e}_3\}$ образуют пучок плоскостей с осью (5); 4/ плоскости эллипсов взаимно параллельны; 5/ прямолинейная конгруэнция (L) есть конгруэнция Рибокура; 6/ аффинные нормали к поверхности (A) пересекают неподвижную прямую (5); 7/ линии $\omega^2=0$ на поверхности (A) – это союзные линии конгруэнции аффинных нормалей, линии кривизны, плоские линии тени, инцидентные плоскости $\{A\vec{e}_1\vec{e}_3\}$; 8/ линии $\omega^1=0$ на поверхности (A) являются эллипсами f_1, подобными эллипсу (3) (касательные к эллипсам f и f_1 в соответствующих точках, т.е. точках пересечения их с прямыми, проходящими через центр эллипсов, параллельны); 9/поверхность (A) - собственная аффинная поверхность вращения.

Теорема 2. Конгруэнции Q_2 обладают следующими свойствами: I/все эллипсы C принадлежат центральной квадрике

$$\Phi \equiv \Delta - 1 = 0\,, \quad \Delta = b(x^3-1)^2 + (x^2)^2 + b\Gamma^3_{11}(x^1)^2 + b\alpha x^1 x^2 \qquad (6)$$

с центром в точке O, которая инцидентна прямой, проходящей через центр эллипса C и фокальную точку $\vec{F}_1 = \vec{A} + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_1$ луча L; 2/поверхность (A) является квадрикой $\Phi_1 \equiv \Delta - b = 0$; 3/линия центров эллипсов C, а также фокальная линия прямолинейной конгруэнции (L), описываемая точкой F_1, принадлежат соответственно квадрикам $\Phi_2 \equiv \Delta = 0$, $\Phi_3 \equiv \Delta + b(\alpha + \Gamma^3_{11}) : \alpha^2 = 0$, причем касательные к этим линиям в соответствующих точках параллельны между собой.

§2. Безынтегральное представление конгруэнций Q_1 и Q_2

Указанные в §I свойства позволяют высказать следующие предположения о построении произвольных конгруэнций Q_1 и Q_2.

I. Для того, чтобы построить конгруэнцию Q_1, следует задать: I/произвольный эллиптический параболоид; 2/один из диаметров MN параболоида; 3/в некоторой плоскости α, проходящей через диаметр MN, кривую Γ.

Обозначим буквами β_0 - касательную плоскость к параболоиду в точке M пересечения его с диаметром MN, β - плоскость, параллельную плоскости β_0.

Конгруэнцию Q_1 в этом случае будут составлять одномерное многообразие эллипсов C, являющихся линиями пересечения параболоида плоскостями β, и конгруэнция прямых L, касательных к однопараметрическому семейству линий, полученному при вращении линии Γ вокруг оси MN по направляющему эллипсу, подобному эллипсу C.

Соответствие между элементами многообразий (C) и (L)

устанавливается следующим образом: каждому эллипсу C соответствует одномерное подмногообразие $(L)_C$ прямых L, касательных к линиям Γ, проведенных в точках пересечения этих линий с плоскостью β эллипса C. Обратно, каждой прямой L, прямолинейной конгруэнции (L), соответствует тот эллипс C, который инцидентен плоскости β, проходящей через точку касания прямой L и линии Γ.

Осуществляя указанные выше построения, получаем некоторую конгруэнцию $\mathfrak{A}$ типа $(CL)_{1,2}$. Докажем, что эта конгруэнция является конгруэнцией Q_1. Для этого отнесем конгруэнцию $\mathfrak{A}$ к подвижному реперу $R = \{A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$, вершину A которого поместим в произвольную точку кривой Γ, вектор $\vec{e}_1$ направим по касательной L к линии Γ в точке A, конец вектора $\vec{e}_3$ совместим с центром эллипса C, соответствующего прямой L, вектор $\vec{e}_2$ помещаем в плоскости эллипса C таким образом, что направления векторов $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ сопряжены, и нормируем так, что точка $\vec{E} = \vec{A} + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ инцидентна эллипсу C.

В построенном репере уравнение параболоида и уравнения эллипса C имеют соответственно вид (3) и (4). Так как плоскости эллипсов взаимно параллельны, то

$$\omega^1_2 = 0\,, \quad \omega^1_3 = 0\,. \qquad (7)$$

Согласно построению репера R, касательную плоскость к поверхности (A) определяют векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, следовательно,

$$\omega^3 = 0\,. \qquad (8)$$

Условия инвариантности параболоида в репере R запишутся в виде

$$d\ln b = 2(\alpha - \beta)\omega^1,\ b\omega^3_2 = \omega^2,\ \omega^2_3 = -\omega^2,\ \omega^2_2 = \beta\omega^1,\ \omega^2_1 = \alpha\omega^2,$$
$$\omega^3_3 = \alpha\omega^1,\ d\alpha = \alpha(\omega^1_1 - \omega^3_3) - \omega^3_1,\ d\beta = \beta[-2\omega^2_2 + \omega^1_1]\,. \qquad (9)$$

Дифференциальные уравнения (7)-(9) совпадают с уравнениями системы (I). Таким образом, конгруэнция $\mathfrak{A}$ есть конгруэнция Q_1. Предложение доказано.

Аналогичными рассуждениями можно доказать справедливость следующего предложения.

II. Чтобы построить конгруэнцию Q_2, следует взять три подобных эллипсоида $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$ с общим центром O и на эллипсоиде Φ_1 задать произвольную линию Γ (линию центров эллипсов C).

Обозначим буквами : α -плоскости,касающиеся эллипсоида Φ_1 в точках линии Γ, β -прямые проходящие через центр O и пересекающие линию Γ .

Конгруэнцию Q_2 составляют однопараметрическое семейство эллипсов C ,являющихся линиями пересечения эллипсоида Φ плоскостями α, и конгруэнция прямых L ,касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостями α и пересекающих прямые β .

Соответствие между элементами многообразий (C) и (L) устанавливается следующим образом.Каждому эллипсу C соответствует однопараметрическое семейство $(L)_C$ прямых L ,касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостью α эллипса C и пересекающих прямую β ,проходящую через центр O и центр эллипса C .Обратно,пусть имеем прямую L ,касающуюся эллипсоида Φ_2 в некоторой точке M_0. Плоскость, инцидентная прямой L и центру O, пересекает линию Γ в некоторых точках $N_1,\dots,N_k$.Проводим плоскость α, касательную к эллипсоиду Φ_1 и проходящую через точку M_0 и одну из точек $N_1,\dots,N_k$.Линия пересечения плоскости α с эллипсоидом Φ определит эллипс C ,соответствующий прямой L .

Список литературы

1.Гринцевичюс К. О линейных неголономных комплексах-"Литовский матем.сб.",1974,т.14

2.Фунтикова Т.П. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ -Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, 1974,вып.4,с.107-117.

3.Фунтикова Т.П. О некоторых классах вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,1975,вып.6,с.205-212 .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.А.Хляпова

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ,АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматриваются конгруэнции Ψ_{n-1} ($(n-1)$-мерные многообразия) центральных квадратичных элементов $\mathcal{F}$ [1].Аналитически строится инвариантная точка B ,не инцидентная гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.Построены и геометрически охарактеризованы инвариантная прямая,не коллинеарная гиперплоскости α_{n-1}, и инвариантная точка,инцидентная этой гиперплоскости.

§1.Инвариантная точка B

Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к подвижному реперу $R^1=\{A,\bar e_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$,начало A которого совмещено с центром квадратичного элемента $\mathcal{F}$,векторы $\bar e_i$ $(i,j,k,\ell=1,\dots,n-1)$ расположены в его гиперплоскости,а вектор $\bar e_n$ — вне её.В репере R^1 уравнения квадратичного элемента $\mathcal{F}$ и замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции Ψ_{n-1} запишутся соответственно в виде

$$a_{ij}x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0; \qquad (1)$$

$$\omega^n = \Lambda^n_i \omega^i, \quad \omega^n_i = \Lambda^n_{ij}\omega^j, \quad \theta_{ij} = \Lambda_{ijk}\omega^k; \qquad (2)$$

где $\Delta\Lambda^n_i \wedge \omega^i = 0, \ \Delta\Lambda^n_{ij} \wedge \omega^j = 0, \ \Delta\Lambda_{ijk} \wedge \omega^k = 0,$ (3)

$\omega^\alpha, \omega^\beta_\alpha$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R^1,