УДК 514.76

О МЕТРИКАХ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

В прикладных задачах при исследовании динамических полисистем на многообразиях возникает необходимость в определении метрик, ассоциированных с длинами траекторий этих полисистем. В [1] исследованы топологические свойства орбит полисистем с приложениями к теории управления. В [2] определены метрики на гладкой поверхности, связанные с динамическими полисистемами специального вида. В настоящей работе обобщены результаты [2] на случай многообразия произвольной конечной размерности.

Пусть V -связное многообразие класса C^∞ размерности n, на котором определены векторные поля X_i $(1 \le i \le n)$ класса C^∞, обладающие тем свойством, что для любой точки $a \in V$ векторы $X_1(a), \dots, X_n(a)$ линейно независимы в касательном пространстве $T_a(V)$. Обозначим φ^i_t однопараметрические группы диффеоморфизмов полей X_i $(1 \le i \le n)$. Считаем, что на V определена риманова метрика g. Предположим, что для любых i,j скобка Ли $[X_i, X_j] = 0$. Согласно [3] существует атлас $\mathcal{A} = \{(\Phi_k, U_k)\}_{k\in N}$ многообразия V такой, что локальным выражением поля X_i в произвольной карте (Φ_k, U_k) атласа $\mathcal{A}$ является $\frac{\partial}{\partial x_i}$ для любого $i: 1 \le i \le n$.

Определим расстояние δ. Если $x,y \in V$ и $x = y$, то положим $\delta(x,y) = 0$. Когда $x \ne y$, рассмотрим кусочно гладкие кривые c на многообразии V следующего вида. Обозначим $T=[a,b]$ -область определения кривой c. Считаем, что: 1) $c(a) = x$, $c(b) = y$; 2) существует $k \in \mathbb{N}$ и последовательность $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ такие, что для всякого $j: 0 \le j \le k-1$ и всякого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеет место одно из следующих соотношений:

$$c(t) = \varphi^i_{t-t_j}(c(t_j)), \quad c(t) = \varphi^i_{-(t-t_j)}(c(t_j)) \tag{I}$$

для некоторого $i: 1 \le i \le n$. Обозначим k через $\nu(c)$, а множество таких кривых для точек x и y -через $\mathfrak{I}(x,y)$. Положим

$$J(c) = \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))}\,dt, \quad \delta(x,y) = \inf_{c \in \mathfrak{I}(x,y)} J(c) \tag{2}$$

П р е д л о ж е н и е 1. Функция δ является расстоянием на многообразии V, и топология, определяемая на V расстоянием δ, совпадает с исходной топологией многообразия.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.8 [4].

Рассмотрим риманову метрику g на многообразии V, полученную переносом евклидовой метрики пространства $\mathbb{R}^n$ [5] с помощью атласа $\mathcal{A}$. Выявим структуру расстояния δ в этом случае. Так как поля локально выглядят как $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в любой карте атласа $\mathcal{A}$, то для любого $z \in V$ справедливо $g(X_i(z), X_i(z))=1$, откуда и из формул (I) и (2) следует, что $\mathcal{J}(c) = b-a$ для любой кривой $c: [a,b] \to V$, $c \in \mathcal{I}(z_1, z_2)$. Очевидно также, что, выбирая U_k достаточно малым, можно считать, что если $z_1, z_2 \in U_k$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Phi_k(z_1)$, $(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \Phi_k(z_2)$, то

$$\delta(z_1, z_2) = \sum_{\ell=1}^{n} |\eta_\ell - \xi_\ell|. \qquad (3)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть многообразие V компактно, тогда для любых точек $x, y \in V$ найдется кривая $c \in \mathcal{I}(x,y)$, $\mathcal{J}(c) = \delta(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о изложим в пяти пунктах.

I. Будем предполагать, что $x \neq y$. Рассмотрим последовательность $c_p \in \mathcal{I}(x,y)$, удовлетворяющую условию $\lim_{p\to\infty} \mathcal{J}(c_p) = \delta(x,y)$. Пусть $T^{(p)} = [a^{(p)}, b^{(p)}]$ область определения кривой c_p. Множество $c_p(T^{(p)})$ компактно. Тогда $c_p(T^{(p)})$ может быть покрыто конечным множеством U_k $(k \in \Lambda(p))$ областей определения карт атласа $\mathcal{A}$. По индукции можно определить последовательность (s_ℓ) точек из $T^{(p)}$ и последовательность $(\varkappa(\ell))$ целых чисел из $\Lambda(p)$, $\ell = 1, 2, \ldots, L(p)$, удовлетворяющих условиям

$$s_1 = a^{(p)}, \; c_p(s_1) \in U_{\varkappa(1)}, \; c_p(s_{\ell+1}) \in U_{\varkappa(\ell+1)} \cap \overline{U}_{\varkappa(\ell)}, \; c_p(s_{\ell+1}) \notin \bigcup_{q=1}^{\ell} U_{\varkappa(q)}$$

для любого ℓ ($\overline{U}_{\varkappa(\ell)}$ – замыкание множества $U_{\varkappa(\ell)}$). Очевидно, что $L(p) \le \mathrm{Card}(\Lambda(p))$. Используя (3), можно определить отображение $\hat{c}_p: \tilde{T}^{(p)} \to V$, удовлетворяющее условиям: $\tilde{c}_p \in \mathcal{I}(x,y)$, $\mathcal{J}(\tilde{c}_p) \le \mathcal{J}(c_p)$, $\nu(\tilde{c}_p) \le 2 \cdot L(p)$, $\tilde{c}_p(\tilde{T}^{(p)}) \subset \bigcup_{\ell=1}^{L(p)} U_{\varkappa(\ell)}$. Тогда $\lim_{p\to\infty} \mathcal{J}(\tilde{c}_p) \le \lim_{p\to\infty} \mathcal{J}(c_p) = \delta(x,y)$. Обратное неравенство очевидно. Кроме того, в силу компактности V можно считать, что атлас $\mathcal{A}$ конечен и $L(p) \le \mu$, т.е. множество $\{\nu(c_p)\}$ $(p \in \mathbb{N})$ ограничено.

2. В силу доказанного в п.I существует $\nu_0: 1 \le \nu_0 \le 2\mu$, такое, что для бесконечного числа номеров p выполняется $\nu(c_p) = \nu_0$. Выбирая подпоследовательность (c_ω) последовательности (c_p), в силу конечности n можно считать, что для любого ω выполняется $\nu(c_\omega) = \nu_0$ и для всякого $j: 1 \le j \le \nu_0$ при любом ω выполняется только одно из равенств (I). Легко выделить, что в силу компактности V длины интервалов $T^{(\omega)}$ для последовательности c_ω ограничены. Осуществляя замену переменной и доопределяя c_ω, можно считать, что $T^{(\omega)} = [0, b]$.

3. Положим $t_0^{(\omega)} = t_0^{(0)} = 0$, $c_0(t_0^{(0)}) = x$. Так как $t_1^{(\omega)} \in [0, b]$, то по теореме Больцано можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_1^{(m)})$. Пусть ее предел равен $t_1^{(0)}$. В силу непрерывности функций $\varphi_t^i(x)$ и доказанному в п.2 последовательность $c_m(t_1^{(m)})$ имеет предел, который обозначим $c_0(t_1^{(0)})$. Последовательность $t_2^{(m)} - t_1^{(m)}$ ограничена, следовательно, содержит сходящуюся последовательность $(d^{(\tau)})$. Пусть ее предел равен $d^{(0)}$. Тогда $t_2^{(\tau)} = d^{(\tau)} + t_1^{(\tau)} \to t_2^{(0)} = d^{(0)} + t_1^{(0)}$. Аналогично $c_\tau(t_2^{(\tau)}) \to c_0(t_2^{(0)})$ и т.д. до ν_0. Таким образом строится подпоследовательность $(c_\tau) \subset (c_\omega)$ и последовательность $c_0(t_j^{(0)})$, $0 \le j \le \nu_0$, причем $t_j^{(\tau)} \to t_j^{(0)}$, $c_\tau(t_j^{(\tau)}) \to c_0(t_j^{(0)})$. Вдобавок, для c_0 при любых j выполняется то же равенство (I), какое выполняется для всех $\tau \in \mathbb{N}$ и того же j. Теперь легко определить функцию $c_0 \in \mathcal{I}(x,y)$ на всем интервале $[0, b]$.

4. Покажем, что c_τ сходится к c_0 равномерно относительно расстояния δ. Пусть $t \in]t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}[$. Так как $t_j^{(\tau)} \to t_j^{(0)}$ и $t_{j+1}^{(\tau)} \to t_{j+1}^{(0)}$ при $\tau \to \infty$, то для достаточно больших τ будет выполняться $t \in]t_j^{(\tau)}, t_{j+1}^{(\tau)}[$. Тогда согласно п.3 существует $i: 1 \le i \le n$ такое, что

$$c_\tau(t) = \varphi^i_{\alpha(t - t_j^{(\tau)})}(c_\tau(t_j^{(\tau)})), \quad c_0(t) = \varphi^i_{\alpha(t - t_j^{(0)})}(c_0(t_j^{(0)})),$$

где $\alpha = \pm 1$. Аналогично рассматривается случай $t = t_j^{(0)}$. В силу непрерывности функций φ_t^i для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\delta(c_\tau(t), c_0(t)) \le \varepsilon \qquad (4)$$

как только τ достаточно велико (при этом $t_j^{(\tau)}$ и $c_\tau(t_j^{(\tau)})$ достаточно близки к $t_j^{(0)}$ и $c_0(t_j^{(0)})$ соответственно сразу для всех $j: 0 \le j \le \nu_0$). Неравенство (4) выполняется для всех $t \in [0, b]$.

5. В силу непрерывности X_i $(1 \le i \le n)$, g и компактности многообразия V имеем $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{J}(c_\tau) = \mathcal{J}(c_0)$. Так как $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{J}(c_\tau) = \delta(x,y)$, то $\mathcal{J}(c_0) = \delta(x,y)$.

Доказанное предложение устанавливает существование геодезических для определенного специальным образом расстояния δ.

Библиографический список

I. Л о б р и К. Динамические полисистемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Математика. М., 1979. Вып. I4. С. I34-I73.

2. А л е ш н и к о в С.И. Об одной метрике на поверхности/ Калинингр. техн. ин-т рыбной промышленности и хоз-ва. Калининград, I985. IOс. Деп. в ВИНИТИ. 27.06.85, № 463I-85.

3. Б и ш о п Р.Л., Криттенден Р.Д. Геометрия многообразий. М.: Мир, I967. 335с.

4. Голубицкий М., Гиемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977. 290с.

5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188с.

УДК 514.75

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ ТОЧЕЧНЫМ СООТВЕТСТВИЕМ

Б.А. Андреев
(Калининградский государственный университет)

В работе изучается точечное соответствие f проективных пространств P_n, $\hat{P}_n$. Найдены четыре отображения многообразий гиперквадрик из P_n и $\hat{P}_n$, которые порождаются соответствием f для каждой пары соответствующих точек. Доказан ряд предложений, в которых дана геометрическая характеристика этих отображений и указана их связь с характеристическими направлениями отображения f и порожденной отображением f связностью.

1. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P\in P_n \mapsto p=f(P)\in \hat{P}_n$ проективных пространств, причем $\operatorname{rang} f = n$ в каждой точке области определения. Располагая вершины подвижных реперов R и r соответственно пространств P_n и $\hat{P}_n$ как в работе [1], получаем систему дифференциальных уравнений отображения f в виде

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_J \Omega^J_0 . \qquad (1)$$

Двукратное продолжение системы (1) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2=\{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}\}$ второго порядка отображения f; дифференциальные уравнения объекта Γ_2 имеют вид (4),(5) [1], а равенство (6)[1] принимает вид: $\operatorname{rang}[\Lambda^i_J]=n$.

2. Пусть $\mathcal{H}(p)$ -многообразие всех гиперквадрик $q\subset \hat{P}_n$, содержащих точку p. Уравнение гиперквадрики $q\in \mathcal{H}(p)$ запишется в виде:

$$a_{ij}\, x^i x^j + 2 a_i x^i x^0 = 0 . \qquad (2)$$

Закон изменения величин a_i, a_{ij} при фиксированных первичных параметрах (т.е. при фиксации пары (P,p)) приводится к виду

$$\overset{\circ}{\nabla} a_i = 0 , \qquad \overset{\circ}{\nabla} a_{ij} = a_{(i}\, \pi^0_{j)} . \qquad (3)$$

Заметим, что объект $\{a_i\}$ определяет касательную гиперплоскость к гиперповерхности (2) в точке p. Из (2) получаем: $\dim \mathcal{H}(p) = C^2_{n+1}+n-1$.

Пусть $\hat{B}$ -множество гиперплоскостей в $\hat{P}_n$, содержащих точку p, тогда $\hat{B}$ является $(n-1)$-мерным подпространством в проективном пространстве, двойственном к $\hat{P}_n$. Пусть $H(p)$ -многообразие гиперквадрик из $\mathcal{H}(p)$, для которых точка p является неособой точкой. Многообразие $H(p)$ естественным образом расслаивается над пространством $\hat{B}$: слой над $\hat{b}\in\hat{B}$ состоит из всех $q\in H(p)$, для которых гиперплоскость $\hat{b}$ является касательной к гиперквадрике q в точке p. Будем обозначать этот слой символом $\mathcal{H}(p,\hat{b})$. Имеем: $\dim \mathcal{H}(p,\hat{b}) = C^2_{n+1} - 1$. Проведя аналогичные рассмотрения для P_n, получаем в соответствующих обозначениях для $Q\in\mathcal{H}(P)$:

$$A_{JK} X^J X^K + 2 A_J X^J X^0 = 0, \qquad (4)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} A_J = 0 , \qquad \overset{\circ}{\nabla} A_{JK} = A_{(J}\, \Pi^0_{K)} . \qquad (5)$$

Так же, как в случае $\hat{P}_n$, многообразие $H(P)$ расслаивается над множеством B гиперплоскостей, инцидентных точке P; слой над $b\in B$ обозначим символом $\mathcal{H}(P,b)$.

3. Предложение 1. Отображение $f: P_n \to \hat{P}_n$ во 2-й дифференциальной окрестности каждой пары (P,p) соответствующих точек порождает отображение $f_q: q\in \mathcal{H}(p) \mapsto Q\in \mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик.

Доказательство. Положим

$$A_J = \Lambda^i_J\, a_i , \qquad (6)$$

$$A_{JK} = \Lambda^i_J \Lambda^j_K\, a_{ij} - \Lambda^i_{JK}\, a_i . \qquad (7)$$

Из уравнений (4),(5)[1] следует, что, если для a_i, a_{ij} выполняются (3), то для A_J, A_{JK} при этом из (6),(7) вытекает выполнение уравнений (5). Таким образом, формулы (6),(7) гиперквадрике (2) ставят в соответствие гиперквадрику (4).

Для выяснения геометрической характеристики отображения f_q рассмотрим его сужение f^0_q на множество распадающихся гиперквадрик $q\in\mathcal{H}(p)$. Пусть (2) распадается. Тогда имеем:

$$a_{ij} = a_{(i}\, p_{j)} \qquad (8)$$

Гиперквадрика q в этом случае определяет пучок гиперплоскостей A_q с базисными гиперплоскостями

$$a_i x^i = 0, \qquad (9)$$

$$p_i x^i + x^0 = 0 . \qquad (10)$$

2 Зак. 1209