Теорема. *Чтобы направление, определяемое в точке B_o инфлексионной в ней кривой $L:R\to P_m$, было (слабо) характеристическим, необходимо и достаточно, чтобы кривая $f\circ L$: $R\to R(Q)$ была (слабо) инфлексионной в элементе $f\circ L(0)$.*

Список литературы

1. *Иванищева Н.Н.* Дифференцируемое отображение проективного пространства P_m в многообразие гиперквадрик пространства P_n // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №30. С. 27 – 29.

2. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра. Топология. Геометрия. 1970 / ВИНИТИ. М., 1971. С. 153 – 174.

3. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразия гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113 – 133.

N. Ivanischeva

DIFFERENTIABLE MAPPING OF THE PROJECTIVE SPACE INTO HYPERQUADRICS MANIFOLD OF THE CENTREPROJECTIVE SPACE

УДК 514.76

В.А. Игошин, Е.К. Китаева

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

На базе метода пульверизационного моделирования [1; 2] и результатов [3] получен ряд теорем, касающихся размерностей алгебр Ли аффинных движений квадратичных квазигеодезических потоков.

Пусть M – (n-1)-мерное многообразие, $f\equiv(M,f)$ – квазигеодезический поток (КП) на M, имеющий следующее координатное выражение:

$$d^2x^i/dt^2 = f^i(x^j,t,dx^j/dt),$$

где i, j =1,…, n-1. КП $f\equiv(M,f)$ называется [4; 5] квадратичным или потоком второй степени (по скорости – первым производным dx/dt), если правые части f^i его координатного уравнения являются полиномами второй степени по dx^i/dt:

$$f^i = -\Gamma^i_{jk}(x^s,t)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - 2B^i_j(x^s,t)\frac{dx^j}{dt} - A^i(x^s,t),$$

где Γ^i_{jk} – коэффициенты некоторой зависящей от t симметричной аффинной связности на M, а B^i_j, A^i – компоненты тензорных полей, также зависящих от t, тип которых обозначен индексами. Все объекты, фигурирующие в данной работе, предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми; индексы i, j, k, l, m, s принимают значения от 1 до n–1 = dim M.

В пространстве $\overline{M} = M \times R$ событий КП определена стандартная аффинная связность $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(\overline{x}^\delta, \dot{\overline{x}}^\delta)$ потока f формулами (например см., [1]):

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}\,,\ \overline{\Gamma}^i_{jn} = B^i_j\,,\ \overline{\Gamma}^i_{nn} = A^i,\ \overline{\Gamma}^n_{ij} = \overline{\Gamma}^n_{nj} = \overline{\Gamma}^n_{nn} = 0\,. \tag{1}$$

Будем называть КП f:

1) *проективно-евклидовым*, если тензор его проективной кривизны $W^\alpha_{\beta\gamma\sigma} \equiv 0$ (см. [1]);

2) *эквиаффинным*, если сокращенный тензор кривизны КП (M,f) является симметричным:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}\ ,\quad \text{где } R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\beta\sigma\alpha};$$

3) *эквипроективным*, если f удовлетворяет первым двум условиям одновременно.

Всюду далее считаем, что в формулах, аналогичных (2), запятая обозначает ковариантное дифференцирование в связности Γ^i_{jk} на M, если не оговорено иное.

Теорема 1. *Необходимые и достаточные условия проективной евклидовости КП второй степени f имеют вид (см. [6]):*

$$\begin{cases} R^i_{jkl} = 0, \quad \partial_n \Gamma^i_{jl} - B^i_{l,\,j} + \dfrac{\delta^i_l}{n+1}(B^s_{s,\,j} - \partial_n \Gamma^s_{sj}) + \\ + \dfrac{\delta^i_j}{n^2-1}[(n+1)B^s_{l,\,s} - B^s_{s,\,l} - n\partial_n \Gamma^s_{sl}] = 0, \\ \partial_n B^i_j + B^i_s B^s_j - A^i_{,\,j} + \dfrac{\delta^i_j}{n-1}(A^s_{,\,s} - B^s_m B^m_s - \partial_n B^s_s) = 0, \\ (B^i_{j,\,k} + \dfrac{\delta^i_j}{n^2-1}\{(n+1)B^s_{k,\,s} - nB^s_{s,\,k} - \partial_n \Gamma^s_{sk}\})_{[j,\,k]} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 1. *Для того чтобы квадратичный КП f был эквиаффинным, необходимо и достаточно выполнение условий :*

$$\partial_i \Gamma^s_{js} = \partial_j \Gamma^s_{is}\,; \qquad \partial_n \Gamma^s_{is} = B^s_{s,\,i}\,.$$

Лемма 2. *Для того чтобы квадратичный КП f был эквипроективным, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\begin{cases} R^i_{jkl} = 0; \quad \partial_n \Gamma^i_{sj} = B^i_{s,\,j}; \\ \partial_n B^i_j + B^j_m B^m_j - A^i_{,\,j} + \dfrac{\delta^i_j}{n-1}(A_{,\,s}{}^s - \partial_n B^s_s - B^s_m B^m_s) = 0\,. \end{cases}$$

Лемма 3. *КП f второй степени с координатным выражением*

$$f^i = -\varepsilon\, \delta^i_j\, x^j / t^2 \tag{3}$$

является эквипроективным .

Ниже под симметриями (движениями) КП понимаются точечные аффинные инфинитезимальные симметрии [1; 2].

Лемма 4. *КП f второй степени с координатным выражением (3) допускает алгебру Ли симметрий размерности* n^2 *с базисными инфинитезимальными операторами*

$$x^j p_i;\quad t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} p_i;\quad t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} p_i;\quad t\, p_n,\ \text{где}\ p_i = \frac{\partial}{\partial x^i};\quad p_n = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Доказательство получается путем решения уравнений Ли:

$$\underset{X}{L}\, \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = X^\sigma \partial_\sigma \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \partial_{\beta\gamma} X^\alpha + \partial_\beta X^\sigma \overline{\Gamma}^\alpha_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma X^\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \partial_\sigma X^\alpha \overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} = 0,$$

в которых коэффициенты связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ определены соотношениями (1).

Будем говорить, что КП (M, f) является максимально подвижным по отношению к потокам, образующим некоторый подкласс в классе всевозможных потоков, если он допускает алгебру Ли движений наибольшей возможной размерности.

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли симметрий максимально подвижного квадратичного КП (M, f) ненулевой кривизны равна* n^2, *где* $\dim M = n-1$.

Лемма 5. *Максимально подвижный квадратичный КП f ненулевой кривизны является эквипроективным.*

Лемма 6. *Тензор Риччи максимально подвижного квадратичного КП f ненулевой кривизны может быть представлен в виде* $R_{\alpha\beta} = \varepsilon\,(1-n)\,\lambda_\alpha \lambda_\beta$, *где* $\lambda_\alpha = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}$ *– кoградиент некоторой функции* λ *на* $\overline{M}$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_n \neq 0$. *При этом* $\lambda_{\alpha,\beta} = c\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta$; c *– постоянная, а запятая обозначает ковариантную производную в связности* $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ *на* $\overline{M}$.

Теорема 3. *Для того чтобы квадратичный КП (M, f) ненулевой кривизны был максимально подвижным, т. е. допускал алгебру Ли движений размерности* n^2, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$R^i_{jkl} = 0;\quad \partial_n \Gamma^i_{jl} = B^i_{l,j};\quad \partial_n B^i_j + B^j_s B^s_j - A^i_{,j} + \varepsilon \delta^i_j \lambda^2_n = 0;$$
$$R_{\alpha,\beta} = \varepsilon\,(n-1)\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta;\ \lambda_{\alpha,\beta} = c\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta,$$

где λ_α *– кoградиент некоторой функции* λ *на* $\overline{M}$; $\lambda_i = 0$; $\lambda_n \neq 0$; c *– постоянная, запятая в первых трех формулах обозначает ковариантную производную в связности* Γ^i_{jk} *на* M, *а в последних двух – в связности* $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ *на* $\overline{M}$.

Список литературы

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. I, II, III // Изв. вузов. Мат., 1992. №6. С. 63 – 70; (1994. №10. С. 26 – 32; 1995 №5. С. 39 – 50).

2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. №3. С. 531 – 535.

3. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности. Казань, 1965. С. 5 – 179.

4. *Шапиро Я.Л.* О квазигеодезическом отображении // Изв. вузов. Мат., 1980. №9. С. 53 – 55.

5. *Игошин В.А*. Гомоморфизмы квазигеодезических потоков второй степени // Изв. вузов. Мат. 1990. №9. С.14 – 21.

6. *Игошин В.А*. Квазигеодезические потоки и их морфизмы: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1996.

7. *Игошин В.А.* О симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1997. №28. С. 28 – 30.

8. Игошин В.А., Китаева Е.К. Об аффинных симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. № 32. С. 49 – 52.

V. Igoshin, E. Kitaeva

THE MAXIMUM MOBILE QUADRATIC QUASIGEODESIC FLOWS WITH NONZERO CURVATURE

An every guasigeodesic flow (QF) $f \equiv (M, f)$ on a manifold M (dim M = n-1) locally may be presented by a second order differential equation:

$$d^2x^i / dt^2 = f^i(x^j, t, dx^j / dt), \quad 1 \le i, j \le n-1.$$

The series of theorems, concerning dimension of the Lie algebras of the maximum mobile quadratic QF with nonzero curvature, is obtained on the basis of the risults of [4] and the method of pulverization modeling [1,2]. For example,

Theorem 2. *The dimension of Lie algebra of affine symmetries of the maximum mobile quadratic QF (M,f) with nonzero curvature is n^2, where dim M = n-1.*

УДК 514.75

Г.В. Кузнецов

(Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого)

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СУБПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются вопросы геометрии движения жидкости в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам. Приводятся выражения для *grad, div* и *rot.* Такое рассмотрение вызвано изучением геометрии сердечно-сосудистой системы человека.

Пусть C^3 – трехмерное субпроективное пространство [1] и R – поле реперов $R_x = \left\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ в области $U \subset C^3$. Уравнения перемещения репера R_x имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \tag{1}$$