УДК 514.75

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
arturkuleshov@yandex.ru

Конструкция пункторов Веблена — Томаса в терминах струй Эресмана

Расслоение пункторов Веблена — Томаса построено путем факторизации расслоения реперов второго порядка над гладким многообразием.

Ключевые слова: пунктор, струя, дифференциальная группа, расслоение реперов, фактор-расслоение, центропроективная группа.

1. Постановка задачи

Пункторы были введены Вебленом и Томасом еще в 20-х гг. прошлого века [6]. О. Вебленом в 1930 г. в связи с рассмотрением единой теории поля была введена проективная метрика в пространство пункторов [7]. Общая теория центропроективных перенесений пункторов вдоль произвольного гладкого многообразия была разработана В. Г. Лемлейном [4].

Представляет интерес описание пункторов в терминах струй Эресмана.

2. Расслоение центропроективных реперов

Пусть X и Y — гладкие многообразия. Говорят, что гладкие отображения $f, g : X \to Y$ p-эквивалентны в точке $x \in X$, если $f(x) = g(x)$, и в этой точке они имеют одинаковые частные производные до порядка p включительно [5]. Легко проверить, что данное определение инвариантно относительно выбора локальных координат как в X, так и в Y, а потому оно определяет некоторый геометрический объект — струю отображения. А именно: струя порядка *p* (или *p*-струя), задаваемая отображением *f*, является классом эквивалентности отображений по вышеуказанному отношению и обозначается $j_x^p f$. Точка x называется началом струи, а ее образ f(x) — концом струи.

Множество *p*-струй отображений из X в Y с началом *x* и концом *y* обозначается $J_{x,y}^p(X,Y)$.

Дифференциальная группа *p*-го порядка D_n^p образована множеством *p*-струй в точке $0 \in R^n$ всевозможных диффеоморфизмов окрестностей этой точки, оставляющих ее неподвижной. Тогда D_n^p есть группа с умножением, определяемым композицией струй:

$$j_0^p(g) \circ j_0^p(h) \overset{def}{=} j_0^p(g \circ h).$$

Нейтральный элемент этой группы является струей тождественного отображения. Обратный элемент к $j_0^p(g)$ есть *p*-струя диффеоморфизма, обратного к *g*.

Пусть *M* — гладкое многообразие размерности *n*. Репером *p*-го порядка r_x^p в точке $x \in M$ называется *p*-струя $j_0^p(f)$ некоторого диффеоморфизма $f:(R^n,0) \to (M,x)$, где $(R^n,0)$ и (M,x) — некоторые окрестности точек 0 и *x* соответственно. Как известно (см., напр.: [1]), многообразие $H^p(M)$ всех *p*-реперов наделено структурой главного расслоения над базой *M* с канонической проекцией $\pi_p : H^p(M) \to M$, где $\pi_p(r_x^p) = x$, и правым действием дифференциальной группы D_n^p порядка *p*. Стандартные координаты в R^n порождают глобальную карту на D_n^p с координатами

$$(u_j^i(l^p), u_{jk}^i(l^p), ..., u_{j_1 \dots j_p}^i(l^p)), \quad l^p \in D_n^p,$$

симметричными по нижним индексам. Каждая локальная карта (U, φ) порождает тривиализацию $\varphi^p : r_x^p \mapsto (x, l^p)$ расслоения $H^p(M)$ и, как следствие, карту на $H^p(M)$ с координатами

$$(x^i, x_j^i, x_{jk}^i, ..., x_{j_1 \dots j_p}^i),$$

где

$$x^i = \varphi^i(x),\ x^i_{j_1\dots j_s} = u^i_{j_1\dots j_s}(l^p), \quad s = 1, ..., p.$$

Глобально определенные на $H^p(M)$ структурные 1-формы ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, …, $\omega^i_{j_1\dots j_{p-1}}$, локальная координатная запись которых имеет вид [1, с. 48]

$$\omega^i = \hat{x}^i_j dx^j,\ \omega^i_j = \hat{x}^i_k(dx^k_j - x^k_{jm}\omega^m),\ \hat{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j,$$

$$\omega^i_{j_1\dots j_s} = \hat{x}^i_k(dx^k_{j_1\dots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} C^\alpha_s x^k_{m(j_1\dots j_\alpha}\omega^m_{j_{\alpha+1}\dots j_s)})$$

$$(s = 2, ..., p-1),$$

инвариантны относительно замен указанных карт.

В [2] доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Соотношения*

$$u^i_j(l^2) = \delta^i_j,\ u^k_{jk}(l^2) = 0$$

выделяют нормальный делитель K группы D^2_n, фактор-группа D^2_n / K по которому изоморфна группе $GP^*(n)$ центропроективных преобразований n-мерного вещественного проективного пространства. Глобальные координаты на D^2_n / K имеют вид (u^i_j, u_i), где

$$u^i_j = u^i_j(l^2),\quad u_i = u^m_{ik}(l^2)\hat{u}^k_m(l^2),\ \hat{u}^k_j u^i_m = \delta^i_j.$$

Замечание. Координатные выражения структурных форм ϑ^i_j, ϑ_i группы D^2_n / K имеют вид

$$\vartheta^i_j = \hat{u}^i_k du^k_j,\ \vartheta_i = du_i - u_k\vartheta^k_i.$$

Утверждение 2. *Многообразие G(M)= $H^2(M)/K$ орбит вида $r^2_x K$, где $r^2_x \in H^2(M)$, наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией $\underline{\pi}: r^2_x K \mapsto x$ и структурной группой D^2_n / K, действующей по закону*

$(r_x^2K)(l^2K)=(r_x^2\cdot l^2)K$. *Каждая локальная карта* (U,φ) *на* M *порождает тривиализацию*

$$\underline{\varphi}^2 : r_x^2K \mapsto (x, l^2K) \in D_n^2K$$

расслоения $H^2(M)/K$ *и локальную карту с координатами*

$$(\varphi^i(x), u_j^i, u_i)\,.$$

При замене $\psi=\tilde\varphi\circ\varphi^{-1}$ *локальных карт* $(U,\ \varphi)$ *и* $(\tilde U,\ \tilde\varphi)$ *на многообразии M локальные координаты на G(M) преобразуются по закону*

$$\tilde x^i=\psi^i(x^j),\quad \tilde x_j^i=\psi_k^i x_j^k\,,\ \ \tilde x_i=x_i+\psi_{jk}^s\hat\psi_s^k x_i^j\,, \tag{1}$$

где (x^i, x_j^i, x_i) *и* $(\tilde x^i, \tilde x_j^i, \tilde x_i)$ *— координаты точки* r_x^2K *расслоения, порождаемые вышеуказанными картами,*

$$\psi^i=\tilde\varphi^i\circ\varphi^{-1}\,,\ \psi_j^i=\partial_j\psi^i(x^k)\,,\ \psi_{jk}^i=\partial_{jk}\psi^i(x^m)\,,\ \widehat{\psi}_k^i\psi_j^k=\delta_j^i.$$

Утверждение 3. *Формы* ω^i, ω_j^i, $\omega_i\overset{def}{=}\omega_{ik}^k$ *инвариантны относительно замен локальных карт вида (1), причем*

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i\,,\ d\omega_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i+\omega^k\wedge\omega_{jk}^i\,,$$

$$d\omega_i=\omega_i^k\wedge\omega_k+\omega^k\wedge\omega_{ik},$$

где $\omega_{jk}=\omega_{jkm}^m$.

Определение. *Расслоение G(M) называется расслоением центропроективных реперов, а его элементы — центропроективными реперами на многообразии M*.

3. Пункторы Веблена — Томаса

Применим стандартную конструкцию ассоциированного расслоения.

Пусть $T^2R^n=J_{0,0}^2(R,R^n)$. На нем определено левостороннее действие группы D_n^2 по закону композиции 2-струй:

$$d^2\cdot\xi:\ \xi\mapsto d^2\circ\xi\,,\ \xi\in T^2R^n,\ d^2\in D_n^2\,.$$

Тогда на прямом произведении $P^2M \times T^2\mathbb{R}^n$ определено правостороннее действие этой группы:

$$(r_x^2, \xi) \cdot d^2 = (r_x^2 \cdot d^2,\ (d^2)^{-1} \cdot \xi) .$$

Многообразие E орбит относительно данного действия есть расслоение над M, ассоциированное с P^2M, причем каноническая проекция λ из $P^2M \times T^2R^n$ на E определена по закону

$$\lambda : (r_x^2, \xi) \mapsto (r_x^2, \xi) \cdot D_n^2 \overset{def}{=} < r_x^2, \xi >,$$

а действие группы D_n^2 на расслоении E определено следующим образом:

$$< r_x^2, \xi > \cdot l^2 = < r_x^2 \cdot l^2, \xi > .$$

Пространство расслоения отождествляется с многообразием 2-скоростей на М

$$T^2M = \bigcup_{x \in M} J_{0,x}^2(R, M)$$

посредством диффеоморфизма

$$\mu : E \to T^2M,\quad < r_x^2, \xi > \mapsto r_x^2 \circ \xi .$$

Определение. *Локальным пространством пункторов Веблена — Томаса назовем многообразие* T^2R^n / K *орбит пространства* T^2R^n *по действию нормального делителя К группы* D_n^2:

$$T^2R^n / K = \{K\xi |\ \xi \in T^2R^n\} .$$

На пространстве T^2R^n / K определено левостороннее действие центропроективной группы $GP^*(n) = D_n^2 / K$ по закону

$$(l^2K)(K\xi) = K(l^2 \cdot \xi) .$$

Тогда в силу утверждения 2 на прямом произведении $G(M) \times (T^2R^n / K)$ определено правостороннее действие этой группы:

$$(r_x^2K, K\xi) \cdot l^2K = (r_x^2K \cdot l^2K,\ (l^2K)^{-1} \cdot K\xi) .$$

Многообразие Q орбит относительно данного действия наделено структурой расслоения над базой M, ассоциированного с

$G(M)$, причем отображение факторизации из $G(M)\times(T^2\mathbb{R}^n / K)$ на Q определено по закону

$$\underline{\lambda} : (r_x^2 K, K\xi) \mapsto (r_x^2 K, K\xi)\cdot GP^*(n) \overset{def}{=} < r_x^2 K, K\xi > ,$$

а действие группы D_n^2 на расслоении Q определено следующим образом:

$$< r_x^2 K, K\xi > \cdot l^2 K = < r_x^2 K \cdot l^2 K, K\xi > .$$

Утверждение 4. *Расслоение Q является моделью расслоения пункторов Веблена — Томаса.*

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер.: Проблемы геометрии. М. : ВИНИТИ, 1979. Т. 9. С. 5—247.
2. *Кулешов А.В.* Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 94—107.
3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М. : ВИНИТИ, 1966. Т. 1. С. 139—189.
4. *Лемлейн В.Г.* Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Лит. мат. сб. 1964. Т 4. С. 41—131.
5. *Ehresmann C.* Les connexion infinitésimales dans un espace fibré differentiablé. Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29—55.
6. *Veblen O, Thomas J.M.* Projective invariants of affine geometry of path // Ann. of Math. 27. 1926. P. 278—296.
7. *Veblen O.* A generalization of the quadratic differential form // The Quaterly J. of Math. Oxford Series. 1930. P. 60—76.

A. Kuleshov

Construction of Veblen — Thomas punctors in terms of Ehresmann's jets

The bundle of Veblen — Thomas punctors is constructed as a quotient bundle of the second order frame bundle over smooth manifold.