УДК 514.75

О. М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта)

КРУЧЕНИЕ АФФИННО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В многомерном проективном пространстве рассматривается распределение плоскостей. С ним ассоциировано главное расслоение, в котором задана групповая связность, включающая аффинно-групповую подсвязность. Введен объект кручения аффинно-групповой связности. Показано, что объект кручения является тензором и содержит ряд подтензоров.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, J, K = \overline{1, n}$) с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \qquad (1)$$

и структурными уравнениями проективной группы GP(n)

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{gathered} \qquad (2)$$

В пространстве P_n будем рассматривать распределение NS_n [1; 2] m-мерных плоскостей P_m, т. е. через каждую точку пространства P_n проведем плоскость P_m. Осуществим разбиение значений индекса $I = (i, a)$ следующим образом: $i, j, k = \overline{1, m}$; $a, b, c = \overline{m+1, n}$. Произведем специализацию репера R, помещая вершины A и A_i в образующую плоскость

P_m, причем A — в ее центр. Уравнения распределения NS_n в репере нулевого порядка имеют вид:

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J, \tag{3}$$

где компоненты фундаментального объекта 1-го порядка удовлетворяют следующим сравнениям по модулю базисных форм ω^I:

$$\Delta\Lambda_{ij}^a \equiv 0, \ \ \Delta\Lambda_{ib}^a - \Lambda_{ij}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i \equiv 0, \tag{4}$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = d\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^b \omega_b^a - \Lambda_{ik}^a \omega_j^k - \Lambda_{kj}^a \omega_i^k.$$

Над распределением NS_n центрированных плоскостей возникает [2] главное расслоение $G(NS_n)$, базой которого является само распределение, а типовым слоем — подгруппа стационарности G центрированной плоскости P_m. Пространством расслоения является проективная группа GP(n), а проекция $\pi: GP(n) \to NS_n$ относит произвольному элементу группы $GP(n)$ ту плоскость P_m распределения NS_n, которая инвариантна под действием этого элемента. Это расслоение порождает четыре фактор-расслоения [3]: плоскостных линейных реперов $L(NS_n)$, центропроективных реперов $A^*(NS_n)$, нормальных линейных реперов $L^*(NS_n)$ и фактор-расслоение $H(NS_n)$ с типовым слоем — аффинной фактор-группой H группы G.

В главном расслоении $G(NS_n)$ способом Г. Ф. Лаптева [4] задана групповая связность, определяемая с помощью объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$, причем компоненты этого объекта удовлетворяют дифференциальным сравнениям [2]

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} \equiv 0, \ \ \Delta\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} \equiv 0, \ \ \Delta\Gamma_{ia} - \Gamma_{ij}\omega^j_a + \Gamma^j_{ia}\omega_j + \omega_{ia} \equiv 0, \tag{5}$$

$$\Delta\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} \equiv 0, \ \ \Delta\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bi}\omega^i_c + \omega^a_{bc} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^i_{aj} - \Gamma^i_{kj}\omega^k_a + \Gamma^b_{aj}\omega^i_b + \omega^i_{aj} \equiv 0, \ \ \Delta\Gamma^i_{ab} - \Gamma^i_{aj}\omega^j_b - \Gamma^i_{jb}\omega^j_a + \Gamma^c_{ab}\omega^i_c \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{ai} + \Gamma^j_{ai}\omega_j + \Gamma^b_{ai}\omega_b - \Gamma_{ji}\omega^j_a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{ab} - \Gamma_{ai}\omega^i_b + \Gamma^i_{ab}\omega_i + \Gamma^c_{ab}\omega_c - \Gamma_{ib}\omega^i_a \equiv 0\,.$$

Объект Γ содержит, в частности, подобъект аффинно-групповой связности $\Gamma_0 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma^i_{ab}\}$.

Внося в структурные уравнения базисных форм ω^i, ω^a распределения плоскостей NS_n формы аффинно-групповой связности [2] $\tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k - \Gamma^i_{ja}\omega^a$, $\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\omega^i - \Gamma^a_{bc}\omega^c$, $\tilde\omega^i_a = \omega^i_a - \Gamma^i_{aj}\omega^j - \Gamma^i_{ab}\omega^b$, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^j \wedge \tilde\omega^i_j + \omega^a \wedge \tilde\omega^i_a + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + 2S^i_{ja}\omega^j \wedge \omega^a + S^i_{ab}\omega^a \wedge \omega^b, \\ D\omega^a = \omega^b \wedge \tilde\omega^a_b + S^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + 2S^a_{ib}\omega^i \wedge \omega^b + S^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c, \end{gathered} \tag{6}$$

где компоненты объекта S выражаются по формулам:

$$\begin{gathered} S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \quad S^i_{ja} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{aj}), \quad S^i_{ab} = \Gamma^i_{[ab]}, \\ S^a_{ij} = \Lambda^a_{[ij]}, \quad S^a_{ib} = \frac{1}{2}(\Lambda^a_{ib} - \Gamma^a_{bi}), \quad S^a_{bc} = \Gamma^a_{[bc]}. \end{gathered} \tag{7}$$

Квадратные скобки в (7) означают альтернирование. В правых частях равенств (7) содержатся компоненты аффинно-групповой связности Γ_0, поэтому будем называть объект S объектом кручения аффинно-групповой связности на распределении плоскостей NS_n.

Учитывая дифференциальные сравнения (5), приходим к следующим сравнениям:

$$\Delta S^a_{ij} \equiv 0, \quad \Delta S^a_{ib} - S^a_{ij}\omega^j_b \equiv 0, \quad \Delta S^a_{bc} - S^a_{ic}\omega^i_b + S^a_{ib}\omega^i_c \equiv 0,$$
$$\Delta S^i_{jk} + S^a_{jk}\omega^i_a \equiv 0, \quad \Delta S^i_{ja} - S^i_{jk}\omega^k_a + S^b_{ja}\omega^i_b \equiv 0, \qquad (8)$$
$$\Delta S^i_{ab} + S^i_{ja}\omega^j_b - S^i_{jb}\omega^j_a + S^c_{ab}\omega^i_c \equiv 0.$$

Из сравнений (8) вытекает

Теорема 1. *Объект кручения* S *аффинно-групповой связности* Γ_0 *является тензором, содержащим один простейший* [5] *подтензор* S^a_{ij} *— тензор неголономности* [1] *и четыре простых* [5] *подтензора:* $\{S^a_{ij}, S^a_{ib}\}$, $\{S^a_{ij}, S^a_{ib}, S^a_{bc}\}$, $\{S^a_{ij}, S^i_{jk}\}$, $\{S^a_{ij}, S^a_{ib}, S^i_{jk}, S^i_{ja}\}$.

Если мы произведем адаптацию репера нормали 1-го рода Нордена, т. е. поместим вершины A_a в N_{n-m}, то

$$\omega^i_a \equiv 0. \quad (9)$$

Отсюда дифференциальные сравнения (8) компонент объекта кручения S с учетом (9) принимают вид:

$$\Delta S^a_{ij} \equiv 0, \quad \Delta S^a_{ib} \equiv 0, \quad \Delta S^a_{bc} \equiv 0, \quad \Delta S^i_{jk} \equiv 0, \quad \Delta S^i_{ja} \equiv 0, \quad \Delta S^i_{ab} \equiv 0.$$

Теорема 2. *При адаптации репера нормализации 1-го рода Нордена тензор кручения* S *распадается на шесть простейших подтензоров.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

2. *Омельян О. М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. № 33. С. 74—78.

3. *Шевченко Ю. И.* Аффинная, коаффинная и линейная фактор-группы в подгруппе проективной группы // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2002. С. 38—39.

4. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Omelyan

THE TORSION OF AFFINE-GROUP CONNECTION ON THE DISTRIBUTION OF PLANES IN THE PROJECTIVE SPACE

In many-dimensional projective space the distribution of planes is considered. The main bundle is associated with the distribution, in which the group connection including affine-group subconnection is given. The object of torsion of affine-group connection is entered. It is shown, the torsion object is tensor and contains a number of subtensors.

УДК 514.75

К. В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта)

О ЛЕММЕ Г. Ф. ЛАПТЕВА

Дано подробное доказательство обобщенной леммы Э. Картана (леммы Г. Ф. Лаптева). Из доказательства вытекает следствие: альтернации форм, являющихся коэффициентами при базисных формах в результате применения леммы, сравнимы с нулем по модулю базисных форм.