УДК 514.75

ПОЛЯ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

Продолжается начатое в [1]-[3] исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: P_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств. Доказано ряд предложений, в которых получены и геометрически охарактеризованы поля гиперквадрик, порожденные в P_n семейством Π_n. В работе используются обозначения и формулы из [1]-[4]. Символ (a,b)[c] указывает на формулу (a,b) статьи [c].

Рассмотрим n-параметрическое семейство коллинеаций $\pi: P_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $A_0 \in P_n$ в заданную точку $a_0 \in p_n$, причем точки A_0 и a_0 описывают n-мерные области. В реперах $\{A_{I'}\}$ и $\{a_{i'}\}$ $\left(I', i' = \overline{0,n}\right)$ семейство Π_n задается системой уравнений (1.6),(1.8)[1]. Гиперплоскости $\nu(\sigma) \subset p_n$, $N(\sigma) \subset P_n$ (см.(1.1),(1.2)[3]) определяют нормализации пространств p_n и P_n.

Для каждой, произвольно заданной точки $A_0 \in P_n$ и соответствующей ей точки $a_0 = \pi(A_0)$ рассмотрим многообразия $\tilde{Q}(A_0)$ и $\tilde{q}(a_0)$ всех гиперквадрик $Q \in \tilde{Q}(A_0)$ и $q \in \tilde{q}(a_0)$ таких, что $A_0 \in Q$ и $a_0 \in q$, причем A_0 и a_0 являются неособыми точками указанных гиперквадрик. В дальнейшем, если ясно, о какой точке A_0(a_0) идет речь, указания на нее в обозначении многообразия $\tilde{Q}(A_0)$($\tilde{q}(a_0)$) будем опускать. В реперах R_σ и r_σ [3] уравнения произвольных гиперквадрик $Q \in \tilde{Q}$ и $q \in \tilde{q}$ имеют соответственно вид

$$Q_{IK} X^I X^K + 2Q_I X^I = 0, \tag{1}$$

$$q_{ij} x^i x^j + 2q_i x^i = 0 \quad \left(I, i, ... = \overline{1,n}\right), \tag{2}$$

причем

$$\begin{cases} \nabla Q_{IK} = Q_{IK,L} \Omega^L \ , \ \nabla Q_I = Q_{I,K} \Omega^K; \\ \nabla q_{ij} = q_{ij,k} \omega^k \quad , \quad \nabla q_i = q_{i,j} \omega^j. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $\tilde{H}(\tilde{h})$ - связка всех гиперплоскостей, инцидентных точке A_0 (точке a_0). Уравнение элементов $H \in \tilde{H}$ и $h \in \tilde{h}$ запишутся в виде

$$H_I X^I = 0 \quad \left(\overset{o}{\nabla} H_I = 0\right) \ , \tag{4}$$

$$h_i x^i = 0 \quad \left(\overset{o}{\nabla} h_i = 0\right) . \tag{5}$$

Многообразие $\tilde{Q}$ естественным образом расслаивается над пространством $\tilde{H}$: слой над $H \in \tilde{H}$ состоит из всех $Q \in \tilde{Q}$, для которых гиперплоскость **H** является касательной к гиперквадрике **Q** в точке A_0. Обозначим указанное расслоение символом $\left(\tilde{Q}, \tilde{H}, T\right)$. Аналогичным образом имеет место расслоение $\left(\tilde{q}, \tilde{h}, \tau\right)$ многообразия $\tilde{q}$ над $\tilde{h}$.

В [3] для каждой точки $A_0 \in P_n$ и нормали $\nu(\sigma)$ определены и геометрически охарактеризованы четыре инвариантных алгебраических многообразия (5.1)[3], названные $\overset{\sigma}{\Gamma}$-, $\overset{\sigma}{G}$-, $\overset{\sigma}{\gamma}$- и $\overset{\sigma}{g}$-индикатрисами. Пусть $\mathfrak{I} \in \left\{ \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\Gamma, \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_G, \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\gamma, \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_g \right\}$. Уравнения каждой из индикатрис (5.1)[3] имеют вид

$$\mathfrak{I}^L_{IK} X^I X^K - 2X^L = 0 \quad \left(\overset{o}{\nabla} \mathfrak{I}^L_{IK} = 0\right), \tag{6}$$

где $\mathfrak{I}^L_{IK}$ принимают значения из Γ^L_{IK}, G^L_{IK}, γ^L_{IK}, g^L_{IK}.

Предложение 1. *Каждая из четырех индикатрис* $\mathfrak{I}$ *определяет сечение* **S** *расслоения* $\left(\tilde{Q}, \tilde{H}, T\right)$.

Доказательство. Положим

$$Q_I = -H_I \ , \ Q_{IK} = H_L \mathfrak{I}^L_{IK} \ .$$

Из уравнений (4), (6) имеем : $\overset{o}{\nabla} Q_{IK} = 0$, $\overset{o}{\nabla} Q_I = 0$. Таким образом, уравнение

$$H_L\left(\mathfrak{I}^L_{IK} X^I X^K - 2X^L\right) = 0 \tag{7}$$

определяет элемент $Q = S(H)$ слоя над **H** расслоения $\left(\tilde{Q}, \tilde{H}, T\right)$. Многообразие всех $Q = S(H)$, $H \in \tilde{H}$ для данного $\mathfrak{I}$ является (n-1)-мерным линейным семейством гиперквадрик.

Построенный так элемент $Q = S(H)$ многообразия $\tilde{Q}$ будем обозначать символом $Q(\mathfrak{I}, H, \sigma)$.

Если гиперплоскость **H** имеет геометрическую интерпретацию, то, тем самым, в силу предложения 5.1 работы [3] гиперквадрика $Q(\mathfrak{I},H,\sigma)$ также оказывается геометрически охарактеризованной : в (n-1)-мерном линейном семействе $C_L\left(\mathfrak{I}^L_{IK}X^I X^K - 2X^L\right)=0$, определяемом индикатрисой $\mathfrak{I}$, это единственная гиперквадрика, имеющая гиперплоскость **H** своей касательной гиперплоскостью в точке A_0. При этом системы величин H_L и $\mathfrak{I}^L_{IK}$ охватываются фундаментальными объектами семейства Π_n и уравнения (1), (3) задают поле гиперквадрик A_0 а $Q \in \tilde{Q}(A_0)$, $A_0 \in P_n$.

Рассмотрим струю 2-го порядка $\overline{\Psi}_{A_0}$ [3,с.56], определяемую семейством Π_n. Пусть $H \in \tilde{H}$ и $\psi \in \overline{\Psi}_{A_0}$. Пучок $\mathbf{H}(H,N(\sigma))$ гиперплоскостей, в которых лежит (n-2)-плоскость $H \cap N(\sigma)$, будем рассматривать как одномерное расширенное аффинное пространство с несобственным элементом $N(\sigma)$. Обозначим символом β_H отображение, которое точке $\mathbf{P} \in P_n$ ставит в соответствие инцидентную ей гиперплоскость пучка $\mathbf{H}(H,N(\sigma))$. Пусть $K(P_I)$ - связка дробно-линейных отображений, касательных к одному из следующих отображений [3,с.55] : $\beta_H \circ \pi^{-1} \circ \varphi$, $\beta_H \circ \pi^{-1} \circ \psi$, $\beta_H \circ \varphi^{-1} \circ a \circ \psi$, $\beta_H \circ \varphi^{-1} \circ \psi$.

Следующие два предложения вытекают из определения главных точек [4] и предложения 5.1 статьи [3].

Предложение 2. *Гиперквадрика* $Q(\mathfrak{I},H,\sigma)$ *где* $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\Gamma$ *(*$\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_G$, $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\gamma$, $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_g$*) является единственной гиперквадрикой в* P_n*, содержащей все главные точки отображения* $\pi^{-1} \circ \varphi$ *(*$\pi^{-1} \circ \psi$, $\varphi^{-1} \circ a \circ \psi$, $\varphi^{-1} \circ \psi$*) и касающейся гиперплоскости **H** в точке* A_0.

Предложение 3. *Точка* $M \in P_n$, $M \neq A_0$ *принадлежит гиперквадрике* $Q(\mathfrak{I},H,\sigma)$*, где* $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\Gamma$ *(*$\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_G$, $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_\gamma$, $\mathfrak{I} = \overset{\sigma}{\mathfrak{I}}_g$*), в том и только в том случае, если для всех отображений* $K(P_I)$*, для которых прямая* $[A_0\mathbf{M}]$ *является* $K(P_I)$*-главной прямой отображения* $\beta_H \circ \pi^{-1} \circ \varphi$, $(\beta_H \circ \pi^{-1} \circ \psi$, $\beta_H \circ \varphi^{-1} \circ a \circ \psi$, $\beta_H \circ \varphi^{-1} \circ \psi$) *, выполняется* : $K(P_I)(M) = N(\sigma)$.

Что касается гиперплоскостей **H**, необходимых для геометрической интерпретации гиперквадрик $Q(\mathfrak{I},H,\sigma)$, то, как показывают следующие два предложения, семейство Π_n позволяет получить целый ряд гиперплоскостей $H \in \tilde{H}$ с известной геометрической характеристикой. Одной из них является гиперплоскость $M_I X^I = 0$ (3.4)[1]. Рассмотрим определенные и проинтерпретированные в [2] отображения K_o и φ из P_n в p_n. Пусть L_1 и L_2 - две гиперплоскости в P_n, из которых по крайней мере одна не инцидентна точке A_o. Обозначим символом $L_1 * L_2$ гиперплоскость $H \in \widetilde{H}$ пучка гиперплоскостей, содержащих (n-2)-плоскость $L_1 \cap L_2$. Очевидно, гиперплоскость $L_1 * L_2$ единственна. Аналогично определяется гиперплоскость $h = l_1 * l_2 \in \widetilde{h}$ по гиперплоскостям $l_1, l_2 \subset p_n$.

Предложение 4. *Гиперплоскость* $\pi^{-1}(\nu(0)) * L^{-1}(\nu(0))$, *(*$L^{-1}(\nu(0)) * K_o^{-1}(\nu(1))$, $\pi^{-1}(\nu(0)) * \pi^{-1}(\nu(1))$, $L^{-1}(\nu(0)) * \pi^{-1}(\pi(1))$, $\pi^{-1}(\nu(0)) * K_o^{-1}(\nu(1))$, $\pi^{-1}(\nu(0)) * N(\sigma)$, $K_o^{-1}(\nu(1)) * N(\sigma)$, $L^{-1}(\nu(0)) * N(\sigma)$*)* *определяется уравнением* $H_I X^I = 0$, *где* $H_I = \Gamma_I + G_I$ *(*$H_I = \left(\overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T \lambda_I^i + \delta_I^T\right) M_T$, $H_I = \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T M_I^i M_T$, $H_I = \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T \left(G_T M_I^i - \Gamma_T \lambda_I^i\right) + G_I$,

$H_I = \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T \left(\Gamma_T M_I^i - G_T \lambda_I^i\right) + \Gamma_I$, $H_I = \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T \Gamma_T M_I^i$, $H_I = \widetilde{\lambda}_i^T \Gamma_T \overset{*}{\lambda}{}_I^i - G_I$,

$H_I = \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T G_T \lambda_I^i - \Gamma_I$*).*

Доказательство вытекает непосредственно из уравнений отображения K_o [2,с.52], отображения **L** [2,с.54], отображения π (1.4) [1] и нормалей $\nu(\sigma)$, $N(\sigma)$ [3,с.53].

Пусть **A** - определяемое аффинором $\{A_K^I\}$ [1,с.54] преобразование центроаффинного пространства $(P_n, A_o, N(\sigma))$.

Предложение 5. *Гиперплоскости* $N(0) * N(1)$ *и* $K_o^{-1}(\nu(0) * \nu(1))$ *связаны соотношением*

$$N(0) * N(1) = A\left(K_o^{-1}(\nu(0) * \nu(1))\right).$$

Доказательство. Для гиперплоскостей $N(0) * N(1)$ и $K_o^{-1}(\nu(0) * \nu(1))$ находим соответственно :

$$\overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T M_T M_I^i X^I = 0, \quad \overset{*}{\widetilde{\lambda}}{}_i^T M_T \lambda_I^i X^I = 0.$$

Доказываемое равенство вытекает теперь из (2.14) [1].

Замечания: 1. Для гиперплоскости $\pi^{-1}(\nu(1)) * K_o^{-1}(\nu(1))$ имеем: $\pi^{-1}(\nu(1)) * K_o^{-1}(\nu(1)) = \pi^{-1}(\nu(0)) * L^{-1}(\nu(0))$.

2. Всего в предложениях 2-5 с учетом гиперплоскости (3.4) [1] для каждого $\sigma \in R$ получена геометрическая характеристика 44-х инвариантных гиперквадрик вида $Q(\mathfrak{I}, H, \sigma)$.

3. Применение оператора **A** в общем случае позволяет из любой внутренним образом присоединенной к семейству Π_n для точки A_o гиперквадрики $Q(\mathfrak{I}, H, \sigma) \in \tilde{Q}$ получить ряд гиперквадрик $Q(\mathfrak{I}, A^m(H), \sigma) \in \tilde{Q}$, где $m \in Z$.

4. С той же целью можно использовать коллинеации $\kappa_1 = L^{-1} o K_o$, $\kappa_2 = \pi^{-1} o L$, $\kappa_3 = K_o^{-1} o \pi$ и κ_1^m, κ_2^m, κ_3^m пространства P_n.

5. Для каждой точки A_o гиперквадрики $Q \in \tilde{Q}(A_0)$ имеем: $L(Q) \in \tilde{q}(a_o)$, $K_o(Q) \in \tilde{q}(a_o)$, $\pi(Q) \in \tilde{q}(a_o)$. При этом выполняются уравнения (2), (3), которые определяют в p_n поля гиперквадрик.

Библиографический список

1. Малаховский Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 50-57.
2. Малаховский Н.В. Нормализации проективных пространств и характеристические числа , порожденные семейством коллинеаций // Там же, 1990. Вып. 21. С. 50-56.
3. Малаховский Н.В. Аффинные связности, порожденные семейством коллинеаций // Там же, 1992. Вып. 23. С. 53-59.
4. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ (m>n) // Там же, 1987. Вып. 18. С.5-9.

N.V. M a l a k h o v s k y

FIELDS OF HYPERQUADRICS, GENERATED BY THE FAMILY OF COLLINEATIONS

Nondegenerated n-parameter family Ïn of collineations π: $P_n \to p_n$ of two n-dimensional projective spaces is considered, mapping the given point
$A_0 \in P_n$ into the given point $a_0 \in p$, where points A_0 and a_0 describe n-dimensional domains in the corresponding spaces. Four invariant algebraic manifolds - indicatrixes and invariant hyperquadrics $Q \ni A_0$ and $q \ni a_0$ are associated with the family Ïn at each point A_0.

It is shown that each of the four indicatrixes defines section S of the fibering ($\tilde{Q}, \tilde{H}, \tilde{T}$) where $\tilde{Q}$ is a set of hyperquadrics Q, $\tilde{H}$ is a set of hyperplanes, tangent to the hyperquadrics Q at A_0. Properties of geometric forms and induced mapping are obtained, defined by there fiberings.