M. Kretov

COMPLEXES OF ELLIPTIC CYLINDERS

In three-dimensional affine space complexes (three-parametrical families) Z_3 of elliptic cylinders with special properties of the associated images are examined. Characteristic and focal varieties of forming elements of investigated complexes are vectorially characterized. The geometrical properties of varieties giving an opportunity further to design of them are obtained.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова

(Балтийский военно-морской институт)

ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введен новый класс трехсоставных распределений: WH-распределения, или вырожденные трехсоставные распределения. Дано задание WH-распределения в репере первого порядка R_1 и доказана теорема существования. Показано, что голономное WH-распределение представляет собой (n–r)-параметрическое семейство центрированных тангенциально вырожденных гиперполос CH_m^r [1]. Доказана теорема существования гиперполосы CH_m^r, заданной в репере R_1.

В работе используется следующая система индексов:
$p,q,t=\overline{1,r}$; $i,j,k=\overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n}$; $u,v=\overline{r+1,n-1}$; $\hat u,\hat v=\overline{r+1,n}$; $\hat A,\hat B=\left(\overline{1,r};\overline{m+1,n}\right)$; $K,L=\overline{1,n}$; $s=m-r$.

1. Как известно [2], S-распределение проективного пространства P_n в репере первого порядка R_1 задается следующим образом (без соответствующих замыканий):

$$\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}}, \;\; \omega_i^n = \Lambda_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}}, \;\; \omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K,$$
$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \;\; \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \;\; \omega_i^p = \Lambda_{iK}^p \omega_0^K, \qquad (1)$$
$$\omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \;\; \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^K, \;\; \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K.$$

Отметим, что

$$\Lambda_{\alpha p}^n = 0, \quad \Lambda_{\alpha j}^n = 0, \quad \Lambda_{jp}^n = 0, \quad \Lambda_{pj}^n = 0, \qquad (2)$$

так как точки $\{A_\alpha\}, \{A_i\}, \{A_p\}$ репера $\{ A_{\bar{J}} \} = R_1$ помещены соответственно в характеристики $E(A_0)$, $\Phi(A_0) \overset{def}{=} [E(A_0), L(A_0)]$, $\Psi(A_0) \overset{def}{=} [E(A_0), \Lambda(A_0)]$ S-распределения.

Потребуем, чтобы при смещениях центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих *L*-распределению, 1) характеристика $\Phi(A_0)$ была постоянной и 2) оснащающая плоскость $M(A_0)$ была постоянной.

Тогда имеем:

1) a) $$dA_i \in [A_0, A_i, A_\alpha] (\operatorname{mod} \omega^j) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_i^p \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \\ \omega_0^n \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_{ij}^p = 0, \\ \Lambda_{ij}^n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

b) $$dA_\alpha \in [A_0, A_i, A_\alpha] (\operatorname{mod} \omega^j) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_\alpha^p \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \\ \omega_\alpha^n \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_{\alpha j}^p = 0, \\ \Lambda_{\alpha j}^n = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

2) a) $$dA_i \in [A_0, A_i, A_p] (\operatorname{mod} \omega^j) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_i^\alpha \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \\ \omega_i^n \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_{ij}^\alpha = 0, \\ \Lambda_{ij}^n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

b) $$dA_p \in [A_0, A_i, A_p] (\operatorname{mod} \omega^j) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_p^\alpha \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \\ \omega_p^n \equiv 0 \, (\operatorname{mod} \omega^j), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_{pj}^\alpha = 0, \\ \Lambda_{pj}^n = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть S-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L) [2]. Тогда добавляется условие

$$\Lambda^{\alpha}_{ip} = 0\,. \tag{7}$$

Скомпонованное S-распределение, для которого выполняются условия (3—7), назовем вырожденным трехсоставным распределением, или *WH*-распределением, так как $rang\left\|M^n_{ab}\right\| = r < m$.

WH-распределение в репере R_1 задается уравнениями

$$\begin{aligned}
&\omega^n_i = \Lambda^n_{i\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}}_0,\ \ \omega^n_{\alpha} = \Lambda^n_{\alpha\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}}_0,\ \ \omega^{\alpha}_i = \Lambda^{\alpha}_{i\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}}_0,\\
&\omega^n_p = \Lambda^n_{p\hat{A}}\omega^{\hat{A}}_0,\ \ \omega^p_i = \Lambda^p_{i\hat{A}}\omega^{\hat{A}}_0,\ \omega^{\alpha}_p = \Lambda^{\alpha}_{p\hat{A}}\omega^{\hat{A}}_0,\\
&\omega^p_{\alpha} = \Lambda^p_{\alpha\hat{A}}\omega^{\hat{A}}_0,\ \ \omega^i_p = \Lambda^i_{pK}\omega^K_0,\ \ \omega^i_{\alpha} = \Lambda^i_{\alpha K}\omega^K_0,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\Lambda^n_{i\beta} + \Lambda^n_{i\beta}\omega^0_0 = \Lambda^n_{i\beta K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^n_{in} + \Lambda^n_{in}\omega^0_0 - \Lambda^n_{i\beta}\omega^{\beta}_n - \omega^0_i = \Lambda^n_{inK}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^n_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^0_0 = \Lambda^n_{\alpha\beta K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^n_{\alpha n} + \Lambda^n_{\alpha n}\omega^0_0 - \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_n - \omega^0_{\alpha} = \Lambda^n_{\alpha nK}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^{\alpha}_{i\hat{\beta}} + \Lambda^{\alpha}_{i\hat{\beta}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{i\hat{\beta}}\omega^{\alpha}_n - \omega^0_i\delta^{\alpha}_{\hat{\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{i\hat{\beta}K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^n_{p\hat{A}} + \Lambda^n_{p\hat{A}}\omega^0_0 - \omega^0_p\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^n_{p\hat{A}K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^p_{i\hat{A}} + \Lambda^p_{i\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{i\hat{A}}\omega^p_n - \omega^0_i\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^p_{i\hat{A}K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^{\alpha}_{p\hat{A}} + \Lambda^{\alpha}_{p\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\hat{A}}\omega^{\alpha}_n - \omega^0_p\delta^{\alpha}_{\hat{A}} = \Lambda^{\alpha}_{p\hat{A}K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^p_{\alpha\hat{A}} + \Lambda^p_{\alpha\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha\hat{A}}\omega^p_n - \omega^0_{\alpha}\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^p_{\alpha\hat{A}K}\omega^K_0\,,\\
&\nabla\Lambda^i_{pK} + \Lambda^i_{pK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pK}\omega^i_n - \omega^0_p\delta^i_K = \Lambda^i_{pKL}\omega^L_0\,,\\
&\nabla\Lambda^i_{\alpha K} + \Lambda^i_{\alpha K}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha K}\omega^i_n - \omega^0_{\alpha}\delta^i_K = \Lambda^i_{\alpha KL}\omega^L_0
\end{aligned} \tag{9}$$

и соотношениями

$$\Lambda^n_{t[p}\Lambda^t_{|v|q]} + \Lambda^n_{vn}\Lambda^n_{[pq]} + \Lambda^n_{v\beta}\Lambda^\beta_{[pq]} = 0\,. \qquad (10)$$

Теорема 1. *WH-распределения проективного пространства P_n существуют и определяются с произволом $s(n-s-1)$ функций n аргументов.*

Представим систему уравнений (8) в виде

$$\begin{gathered}\Delta\Lambda^n_{i\hat\beta}\wedge\omega_0^{\hat\beta}=0\,,\ \Delta\Lambda^n_{\alpha\hat\beta}\wedge\omega_0^{\hat\beta}=0\,,\ \Delta\Lambda^\alpha_{i\hat\beta}\wedge\omega_0^{\hat\beta}=0\,,\\ \Delta\Lambda^n_{p\hat A}\wedge\omega_0^{\hat A}=0\,,\ \Delta\Lambda^p_{i\hat A}\wedge\omega_0^{\hat A}=0\,,\ \Delta\Lambda^\alpha_{p\hat A}\wedge\omega_0^{\hat A}=0\,, \qquad (11)\\ \Delta\Lambda^p_{\alpha\hat A}\wedge\omega_0^{\hat A}=0\,,\ \Delta\Lambda^i_{pK}\wedge\omega_0^K=0\,,\ \Delta\Lambda^i_{\alpha K}\wedge\omega_0^K=0\end{gathered}$$

и введем следующие обозначения: А = $s(n-m)+n-m-1$; В = = $r(2n-m-r-1)$, С = $s(n-s-1)$. Тогда характеры системы (11) имеют вид: S_1 =А+В+С, S_2 =А+В+С, …, S_{n-m} =А+В+С, S_{n-m+1} =В+С, S_{n-m+2} =В+С, …, S_{n-m+r} =В+С, S_{n-s+1} =С, S_{n-s+2} =С, …, S_n =С. Следовательно,

$$\begin{gathered}Q=S_1+2S_2+\ldots+(n-m)S_{n-m}+(n-m+1)S_{n-m+1}+\ldots\\ \ldots+(n-s)S_{n-s}+(n-s+1)S_{n-s+1}+\ldots+nS_n=\\ =(1+2+\ldots+(n-m))\,(\text{А+В+С})+\\ +[(n-m+1)+\ldots+(n-s)]\,(\text{В+С})+((n-s+1)+..+n)\ \text{С}=\\ \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\text{А}+\frac{(n-s)(n-s+1)}{2}\text{В}+\frac{n(n+1)}{2}\text{С}.\end{gathered}$$

Применяя лемму Картана, распишем уравнения (11) следующим образом:

$$\begin{gathered}\Delta\Lambda^n_{i\hat\beta}=\Lambda^n_{i\hat\beta\hat\gamma}\omega_0^{\hat\gamma}\,,\ \Delta\Lambda^n_{\alpha\hat\beta}=\Lambda^n_{\alpha\hat\beta\hat\gamma}\omega_0^{\hat\gamma}\,,\ \Delta\Lambda^\alpha_{i\hat\beta}=\Lambda^\alpha_{i\hat\beta\hat\gamma}\omega_0^{\hat\gamma}\,,\\ \Delta\Lambda^n_{p\hat A}=\Lambda^n_{p\hat A\hat B}\omega_0^{\hat B}\,,\ \Delta\Lambda^p_{i\hat A}=\Lambda^p_{i\hat A\hat B}\omega_0^{\hat B}\,,\ \Delta\Lambda^\alpha_{p\hat A}=\Lambda^\alpha_{p\hat A\hat B}\omega_0^{\hat B}\,, \qquad (12)\\ \Delta\Lambda^p_{\alpha\hat A}=\Lambda^p_{\alpha\hat A\hat B}\omega_0^{\hat B}\,,\ \Delta\Lambda^i_{pK}=\Lambda^i_{pKL}\omega_0^L\,,\ \Delta\Lambda^i_{\alpha K}=\Lambda^i_{\alpha KL}\omega_0^L\,.\end{gathered}$$

Подсчитаем число N новых функций, появившихся в правых частях уравнений (12). В силу симметрии этих функций по последним двум нижним индексам получим $N = Q$. Таким образом, система (11) в инволюции и ее произвол определяется последним характером $S_n = s(n-s-1)$, что и требовалось доказать.

2. Система уравнений

$$\omega_0^{\hat{u}} = 0, \tag{13}$$

ассоциированная с системой (11), вполне интегрируема тогда и только тогда, когда тензор неголономности $r_{pq}^{\hat{u}}$ равен нулю. В этом случае уравнения (11; 13) задают центрированную тангенциально вырожденную гиперполосу CH_m^r (без соответствующих замыканий) [1]:

$$\omega_0^{\hat{u}} = 0,\ \omega_i^n = 0,\ \omega_\alpha^n = 0,\ \omega_i^\alpha = 0,$$
$$\omega_p^n = \Lambda^n_{pq}\omega_0^q,\ \omega_i^p = \Lambda^p_{iq}\omega_0^q,\ \omega_p^\alpha = \Lambda^\alpha_{pq}\omega_0^q,\ \omega_\alpha^p = \Lambda^p_{\alpha q}\omega_0^q, \tag{14}$$
$$\omega_p^i = \Lambda^i_{pq}\omega_0^q,\ \omega_\alpha^i = \Lambda^i_{\alpha q}\omega_0^q.$$

Теорема 2. *Гиперполосы CH_m^r, заданные в репере R_1, существуют и определяются с произволом $(m-r)(n-m+1)+$ $+2(n-m-1)+1$ функций r аргументов.*

Доказательство. Найдем характеры системы:

$$\Delta\Lambda^n_{pq}\wedge\omega_0^q = 0,\ \Delta\Lambda^p_{iq}\wedge\omega_0^q = 0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{pq}\wedge\omega_0^q = 0, \tag{15}$$
$$\Delta\Lambda^p_{\alpha q}\wedge\omega_0^q = 0,\ \Delta\Lambda^i_{pq}\wedge\omega_0^q = 0,\ \Delta\Lambda^i_{\alpha q}\wedge\omega_0^q = 0,$$

предварительно введя обозначения $\mathcal{D} = 2n - 2r - 1$, $\mathcal{F} = s(n-m-1)$. Имеем $S_1 = r\cdot\mathcal{D} + \mathcal{F}$, $S_2 = (r-1)\cdot\mathcal{D} + \mathcal{F}$, $S_3 = (r-2)\cdot\mathcal{D} + \mathcal{F}$, …, $S_r =$ $= \mathcal{D} + \mathcal{F}$. Тогда $Q = S_1 + 2S_2 + \ldots + rS_r = \dfrac{r(r+1)(r+2)}{6}\cdot\mathcal{D} + \dfrac{r(r+1)}{2}\cdot\mathcal{F}$.

Применяя лемму Картана, уравнения (15) запишем в виде:

$$\Delta\Lambda^n_{pq} = \Lambda^n_{pqt}\omega^t_0,\ \Delta\Lambda^i_{pq} = \Lambda^i_{pqt}\omega^t_0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{pq} = \Lambda^\alpha_{pqt}\omega^t_0; \quad (16а)$$

$$\Delta\Lambda^p_{iq} = \Lambda^p_{iqt}\omega^t_0,\ \Delta\Lambda^p_{\alpha q} = \Lambda^p_{\alpha qt}\omega^t_0\ (\mathrm{a}_1),\ \Delta\Lambda^i_{\alpha q} = \Lambda^i_{\alpha qt}\omega^t_0. \quad (16б)$$

Учитывая, что в уравнениях (16а) функции симметричны по индексам *p*, *q*, *t*, находим $N = \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\mathcal{D} + \frac{r(r+1)}{2}\cdot\mathcal{F} = Q$, т.е. система (15) в инволюции и произвол существования решения системы (15) определяется последним характером S_r = $= \mathcal{D} + \mathcal{F} = (1+2(m-r) + 2\,(n-m-1)) + (m-r)(n-m-1) =$ $= (m-r)(n-m-1) + 1$, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Попова Т. Ю.* Центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы CH^r_m ранга *r* проективного пространства P_n / Калинингр. ВВМУ. Калининград, 1997. Деп. в ВИНИТИ, № 197-В97.

2. *Волкова С.Ю.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов *S*-распределения / Балтийский военно-морской институт. Калининград, 2000. Деп. в ВИНИТИ, № 343-В2001.

T. Maksakova

THE DEGENERATED THREE-COMPOSITE DISTRIBUTIONS

The new class of three-composite distributions is introduced: WH-distributions or the degenerated three-composite distributions. The assignment of WH-distribution in a frame of the first order R_1 is given and the existence theorem is proved. It is shown, that the holonomic WH-distribution represents (n–r)-parametrical family of centered tangential degenerated hyperstrips CH^r_m [1]. The existence theorem of hyperstrip CH^r_m, given in a frame R_1, is proved.