5. *Долгарев А.И.* Поверхности одулярного пространства на нильпотентной группе Ли // Междунар. шк.-семин. по геометрии и анализу, посв. 90-летию Н.В.Ефимова: Тез. докл. Ростов н/Д., 2000. С. 32-33.

6. *Долгарев А.И.* Одули и одулярные пространства на группах Ли // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова. Казань, 1999. С.82-83.

7. *Скотт П.* Геометрии на трёхмерных многообразиях. М.: Мир, 1986. 168 с.

8. *Левичев А.В.* Однородная хроногеометрия. I. Новосибирск: НГУ, 1991. 52 с.

9. *Левичев А.В.* Некоторые методы исследования приченной структуры однородных лоренцевых многообразий. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. 40 с. Препринт № 20.

10. *Долгарев А.И.* Дифференцирование одулярных функций // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. №. 10. С. 57-79.

A.I. Dolgarew

NON-DIFFERENTIABLE ODULE

.

The presence of exterior operation on an odule (generalization of the module) allows determine derivation of odular functions, as generalization of derivation of vectorial functions. A differential odular (nonlinear) geometry with tangents by map in an odule occurs. It turns out that, not for any odule odular functions differentiable. The example of such odule is given in this paper.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева

(Калининградский государственный университет)

КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННЫЕ ГИПЕРПОЛОСЫ H_M АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_N

Исследуются касательно r- оснащенные гиперполосы $H_m \subset A_n$[1]. Поле оснащающих плоскостей Λ_r (Λ-расслоение) порождает сопряженное поле (m-r)- мерных L-плоскостей (L- расслоение) относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности V_m гиперполосы H_m. Показано, что в дифференциальной окрестности 2-го порядка к гиперполосе H_m внутренним образом присоединяются пучки нормалей Бляшке 1-го рода соответственно для Λ-,L-,T -расслоений (T- расслоениие – расслоение касательных плоскостей базисной поверхности V_m). Установлены две биекции Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосы H_m в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Введены внутренние аффинные связности $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$

гиперполосы H_m и Λ-,L-расслоений и нормальная характеристическая центроаффинная связность $\eta^{\perp}$ в χ-расслоении характеристик χ_{n-m-1}. Найдены компоненты тензоров кривизны этих связностей. Рассматриваются аффинные связности, индуцируемые полем нормалей Бляшке. Выяснены признаки эквиаффинности внутренних аффинных связностей Γ_1,Γ_2, $\chi^{\perp}$, порождаемых полями Λ-,L-,χ-расслоений.

Используется следующая система индексов:

$$I, J, K = \overline{1,n};\ i, j, k,...=\overline{1,m};\ p, q, r,...\overline{1,r}\ ;\ \ a, b, c,...=\overline{r+1,m};$$

$$\alpha,\ \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1};\ \ \varphi = \{\alpha, n\};\ \ \tau=\{p,\ a,\ \alpha\}.$$

Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R=\{M,\bar{e}_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого задаются дифференциальными уравнениями:

$$d\overline{M} = \omega^I \bar{e}_I,\ \ d\bar{e}_I = \omega_I^K \bar{e}_K.$$

Инвариантные формы ω^I, ω_I^K аффинной группы удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^I = \omega^L \wedge \omega_L^I,\ \ d\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K.$$

Репер R выбираем следующим образом: вершину M репера R совмещаем с текущей точкой A поверхности V_m, векторы $\overline{e_p}$ помещаем в касательную r- плоскость Λ=Λ(A), векторы $\overline{e_a}$ - в (m-r)- плоскость L=L(A), векторы $\overline{e_\alpha}$ - в характеристику $\chi=\chi_{n-m-1}$(A), а вектор $\overline{e_n}$ занимает произвольное положение, образуя с векторами $\overline{e_\tau}$ репер {A, $\overline{e_\tau}, \overline{e_n}$} пространства A_n, который назовем репером 1-го порядка R^1. В выбранном репере R^1 гиперполоса $H_m \subset A_n$ задается уравнениями(соответствующие замыкания не выписываются):

$$\omega^n = 0,\ \ \omega^\alpha = 0,\ \ \omega_\alpha^n = 0,\ \ \omega_p^n = a_{pq}^n \omega^q,\ \ \omega_a^n = a_{ab}^n \omega^b,\ \ \omega_p^\alpha = a_{pq}^\alpha \omega^q,$$

$$\omega_a^\alpha = a_{ab}^\alpha \omega^b,\ \ \omega_p^a = \Lambda_{pi}^a \omega^i,\ \omega_a^p = L_{ai}^p \omega^i,\ \omega_\alpha^a = l_{\alpha i}^a \omega^i,\ \ \omega_\alpha^p = l_{\alpha i}^p \omega^i,$$

где $a_{[pq]}^\varphi = 0,\ \ a_{[ab]}^\varphi = 0,\ \ l_{\alpha[i}^k a_{j]k}^n = 0\ (a_{pb}^n = a_{aq}^n = 0),$

$$a_{pq}^\varphi L_{[ab]}^q - \Lambda_{p[a}^c a_{b]c}^\varphi = 0.$$

В дифференциальной окрестности 1-го порядка внутренним образом присоединяются к гиперполосе H_m поля квазитензоров

$$\nabla t_n^\alpha + \omega_n^\alpha = t_{ni}^\alpha \omega^i,$$

ассоциированные соответственно с Λ-,L- расслоениями. В дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним образом построены квазитензоры:

$$t_n^p = -\frac{1}{m-r} a_n^{pq} a_{abq}^n a_n^{ba}; \; T_n^a = -\frac{1}{r} a_n^{ab} a_{pqb}^n a_n^{qp},$$

$$t_n^a = -\frac{1}{m-r+2} a_n^{ab} a_{cdb}^n a_n^{dc};$$

ассоциированные соответственно с $\Lambda-, L-, T-$расслоениями.

2. **Определение**. (n-m)- плоскость $B_{n-m}=[A, \overline{B}, \chi]$ $(b_{n-m}=[A, \overline{b}, \chi])$, натянутую на прямую Бляшке B (b) и характеристику χ гиперполосы H_m назовем первой (второй) аффинной нормалью Бляшке B_{n-m} (b_{n-m}) 1-го рода гиперполосы H_m, где

$$\overline{B} = T_n^p \overline{e}_p + T_n^a \overline{e}_a + T_n^\alpha \overline{e}_\alpha + \overline{e}_n, \; \overline{b} = t_n^p \overline{e}_p + t_n^a \overline{e}_a + t_n^\alpha \overline{e}_\alpha + \overline{e}_n.$$

Определение. (n-r)- плоскость $K_{n-r}=[B_{n-m}, L]$, натянутую на нормаль Бляшке B_{n-m} и на плоскость L, назовем первой аффинной нормалью Бляшке 1-го рода Λ- плоскости.

Определение. (n-r)-плоскость $k_{n-r}=[b_{n-m}, L]$, натянутую на нормаль Бляшке b_{n-m} и на плоскость L, назовем второй аффинной нормалью Бляшке 1-го рода Λ-плоскости.

Аналогично определяются первая и вторая нормали Бляшке 1-го рода $W_{n-m+r} = [b_{n-m}, \Lambda]$ и $W_{n-m+r} = [B_{n-m}, \Lambda]$ для L- плоскости. Найденные нормали Бляшке 1-го рода позволяют построить пучки нормалей Бляшке 1-го рода соответственно Λ-,L- расслоений:

$$\Phi_{n-r}(\varepsilon) = K_{n-r} + \varepsilon(\kappa_{n-r} - K_{n-r}), \tag{1}$$

$$\Psi_{n-m+r}(\delta) = W_{n-m+r} + \delta(w_{n-m+r} - W_{n-m+r}), \tag{2}$$

определяемые соответственно пучками квазитензоров 2-го порядка

$$I_n^p = T_n^p + \varepsilon(t_n^p - T_n^p), \tag{3}$$

$$I_n^a = T_n^a + \delta(t_n^a - T_n^a). \tag{4}$$

Построен пучок нормалей Бляшке 1-го рода гиперполосы H_m

$$N_{n-m}(\eta) = B_{n-m} + \eta(b_{n-m} - B_{n-m}), \tag{5}$$

который задается пучком квазитензоров 2-го порядка:

$$I_n^i(\eta) = T_n^i + \eta(t_n^i - T_n^i). \; (6)$$

Теорема 1. Пучки нормалей Бляшке 1-го рода (1), (2), (5) соответственно Λ-,L-,T-расслоений внутренним образом присоединены в дифференциальной окрестности 2-го порядка гиперполосы H_m.

3. Найдены два соответствия Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода Λ-,L-расслоений:

$$\mu_p = a^n_{pq}\nu^q_n + t_p,\ \nabla\mu_p = \mu_{pi}\omega^i;\ \rho_p = a^n_{pq}\nu^q_n + T_p,\ \nabla\rho_p = \rho_{pi}\omega^i;$$
$$\mu_a = a^n_{ab}\nu^b_n + t_a,\ \nabla\mu_a = \mu_{ai}\omega^i;\ \rho_a = a^n_{ab}\nu^b_n + T_a,\ \nabla\rho_a = \rho_{ai}\omega^i;$$

и два соответствия Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосы H_m:

$$\mu_i = a^n_{ik}\nu^k_n + t_i,\ \ \nabla\mu_i = \mu_{ik}\omega^k; \qquad (7)$$
$$\rho_i = a^n_{ik}\nu^k_n + T_i,\ \ \nabla\rho_i = \rho_{ik}\omega^k. \qquad (8)$$

Из теоремы 1 в силу (7), (8) следует

Теорема 2. *Пучок нормалей Бляшке 1-го рода* I^k_n *(6) порождает в дифференциальной окрестности 2-го порядка по два пучка нормалей 2-го рода гиперполосы* H_m*, определяемых биекциями:*

$$\varphi_i(\varepsilon) = a^n_{ik}I^k_n(\varepsilon) + T_i, \qquad (9)$$
$$\psi_i(\delta) = a^n_{ik}I^k_n(\delta) + t_i. \qquad (10)$$

Каждый из пучков (9), (10) порождает соответствующие пучки нормалей Бляшке 2-го рода для Λ-,L-расслоений:

$$\varphi_p(\varepsilon) = a^n_{pq}I^q_n(\varepsilon) + T_p,\ \psi_p(\delta) = a^n_{pq}I^q_n(\delta) + t_p,$$
$$\varphi_a(\varepsilon) = a^n_{ab}I^b_n(\varepsilon) + T_a,\ \psi_a(\delta) = a^n_{ab}I^b_n(\delta) + t_a.$$

Следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Пучки нормалей Бляшке 1-го рода (3), (4), (6) в дифференциальной окрестности 2-го порядка в силу соответствий Бомпьяни-Пантази (7), (8) порождают по два пучка внутренних двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна для T-,Λ-,L-расслоений, ассоциированных с гиперполосой* $H_m \subset A_n$.

4. Оснащение гиперполосы H_m полями объектов $\{\nu^p_n\}, \{\nu^a_n\}, \{\nu^i_n\}, \{\nu^\alpha_n\}$ определяет аффинную связность в Λ-,L-,T- расслоениях и в χ-расслоении. Формами аффинных связностей являются: $\tilde\omega^i = \omega^i$, $\tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \gamma^i_{jk}\omega^k$, $\tilde\omega^p_q = \omega^p_q - \gamma^p_{qi}\omega^i$, $\tilde\omega^p_q = \omega^p_q - \gamma^p_{qi}\omega^i$, $\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - \gamma^a_{bi}\omega^i$, $\tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \gamma^\alpha_{\beta i}\omega^i$. При этом формы $\tilde\omega^i, \tilde\omega^i_j$ задают аффинную связность γ в T-расслоении касательных плоскостей. Эту связность назовем внутренней аффинной связностью

гиперполосы H_m [2], соответственно, формы $\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^p_q$ и $\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^a_b$ определяют внутренние аффинные связности γ_1 и γ_2 в Λ-,L- расслоениях. Формы $\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^\alpha_\beta$ задают аффинную связность $\eta^\perp$ в χ-расслоении, которую будем называть нормальной характеристической центроаффинной связностью [2]. Внешние дифференциалы форм $\tilde{\omega}^i_j, \tilde{\omega}^p_q, \tilde{\omega}^a_b$ представимы в виде:

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \tilde{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ d\tilde{\omega}^p_q = \tilde{\omega}^s_q \wedge \tilde{\omega}^p_s + \tilde{R}^p_{qij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

где $\tilde{R}^i_{jkl} = -\nu^f_n \nu^i_n a^n_{j[k} a^n_{l]f} + a^\alpha_{j[k} a^i_{\alpha l]} - \nu^i_{n[k} a^n_{l]j} (a^\alpha_{pb} = a^\alpha_{aq} = 0),$

$$\tilde{R}^a_{bij} = -\nu^c_n \nu^a_n a^n_{b[i} a^n_{j]c} + a^\alpha_{b[i} l^a_{\alpha j]} - \nu^a_{n[i} a^n_{j]b} + L^p_{b[i} \Lambda^a_{pj]} - \nu^a_n L^p_{b[i} a^n_{j]p}$$

– компоненты тензоров кривизны связностей $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$.

Компоненты объекта связности γ имеют следующее строение:

$$\gamma^i_{jk} = \nu^i_n a^n_{jk},\ \gamma^i_{[jk]} = \nu^i_n a^n_{[jk]} = 0.$$

Аналогично, $\gamma^p_{qi} = \nu^p_n a^n_{qi},\ \gamma^a_{bi} = \nu^a_n a^n_{bi},\quad \gamma^p_{[qi]} = \gamma^a_{[bi]} = 0.$

Но так как $a^n_{qb} = 0,$ то окончательно получаем

$$\gamma^p_{[qs]} = \gamma^a_{[bc]} = 0,\ \gamma^p_{qa} = 0,\ \gamma^a_{bp} = 0.$$

Внешний дифференциал форм $\tilde{\omega}^\beta_\alpha = \omega^\alpha_\beta - \nu^\alpha_n \omega^n_\beta - \omega^\alpha_\beta$ представим в виде: $d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \tilde{R}^\alpha_{\beta ij}\omega^i \wedge \omega^j,$ где $R^\alpha_{\beta ij} = a^\alpha_{k[j} l^k_{\beta i]}$ – компоненты тензора кривизны связности $\eta^\perp$.

5. Формы $\overset{1}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - T^i_n \omega^n_j$ задают внутреннюю аффинную связность Γ_1, индуцируемую полем нормалей Бляшке B_{n-m}, а формы $\overset{2}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - t^i_n \omega^n_j$ - внутреннюю аффинную связность Γ_2, индуцируемую полем нормалей Бляшке b_{n-m}. Имеем

$$d\overset{1}{\omega}{}^i_j = \overset{1}{\omega}{}^k_j \wedge \overset{1}{\omega}{}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ R^i_{jkl} = -T^f_n T^i_n a^n_{j[k} a^n_{l]f} - T^i_{n[k} a^n_{l]j} + a^\alpha_{j[k} l^i_{\alpha l]};$$

$$d\overset{2}{\omega}{}^i_j = \overset{2}{\omega}{}^f_j \wedge \overset{2}{\omega}{}^i_f + r^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ r^i_{jkl} = -t^f_n t^i_n a^n_{j[k} a^n_{l]f} - t^i_{n[k} a^n_{l]j} + a^\alpha_{j[k} l^i_{\alpha l]}.$$

Величины R^i_{jkl}, r^i_{jkl} – компоненты тензоров кривизн связностей Γ_1, Γ_2. Формы ω^α_β являются формами внутренней связности $\chi^\perp$, индуцируемой полем характеристик χ_{n-m-1}.

Исследуем признаки эквиаффинности связностей Γ_1, Γ_2. Находим тензоры Риччи этих связностей:

$$R_{jk} = R^i_{jki} = T_j T_k - T_i T^i_n a^n_{jk} - T^i_{nk} a^n_{ij} + T^i_{ni} a^n_{kj} + a^\alpha_{jk} l^i_{\alpha i} - a^\alpha_{ji} l^i_{\alpha k}.$$

Операция альтернирования приводит к следующему результату:

$$R_{[jk]} = T^i_{n[j} a^n_{k]i} - a^\alpha_{i[j} l^i_{\alpha k]} = S_{[jk]} - a^\alpha_{i[j} l^i_{\alpha k]}.$$

Аналогично, $r_{[jk]} = t^i_{n[j} a^n_{k]i} - a^\alpha_{i[j} l^i_{\alpha k]} = P_{[jk]} - a^\alpha_{i[j} l^i_{\alpha k]}$.

Согласно [3] эквиаффинная связность характеризуется симметрией тензора Риччи, что приводит к условиям

$$S_{[kl]} = a^\alpha_{j[k} l^j_{\alpha l]}, \tag{11}$$

$$P_{[kl]} = a^\alpha_{j[k} l^j_{\alpha l]}. \tag{12}$$

Таким образом, приходим к признаку эквиаффинности внутренних аффинных связностей Γ_1, Γ_2.

Теорема 4. *Для того, чтобы внутренняя аффинная связность $\Gamma_1(\Gamma_2)$ гиперполосы H_m, индуцируемая полем нормалей Бляшке $B_{n-m}(b_{n-m})$, была эквиаффинна необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11)((12)).*

В χ -расслоении внутренняя связность плоская, если

$$\boxed{\qquad\quad}. \tag{13}$$

Условие (13) эквивалентно любому из условий

$$a^\alpha_{i[k} l^i_{\alpha l]} = 0, \tag{14}$$

$$R_{[kl]} = T^i_{n[k} a^n_{l]i} = S_{[kl]}, \tag{15}$$

$$r_{[kl]} = t^i_{n[k} a^n_{l]i} = P_{[kl]}. \tag{16}$$

Теорема 5. *Внутренняя аффинная связность $\chi^\perp$, индуцируемая полем характеристик χ_{n-m-1}, плоская тогда и только тогда, когда выполняется любое из условий (14), (15), (16).*

Теорема 6. *Для того, чтобы на гиперполосе H_m одновременно связности Γ_1, Γ_2 были эквиаффинными, а связность $\chi^\perp$ плоской, необходимо и достаточно выполнение условий (14)-(16).*

Список литературы

1. *Попов Ю.И. Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.
2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983.
3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

A. Eliseeva

TANGENT EQUIPPED HYPERSTRIPS H_m IN THE AFFINE SPACE A_n

Tangent equipped hyperstrips in the affine space are investigated. Fields of equipping planes generates adjoint field of planes aboute asimptotic bunch of tensors for the hyperstrip. Bunches of Blaschke's normals of the 1-st kind are adjoined in the interior manner. Two biectios Bompiani – Pantasi are determined between normals of the 1-st and 2-nd kind. Interior affine connections of hyperstrip and normal characteristical center-affine connection are introduced. These connection curvature tensors are found. The sings of connection equiaffinety are cleared up.

УДК 514.75

О.М. Жовтенко

(Калининградский государственный университет)

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГРУППОВЫЕ СВЯЗНОСТИ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве рассмотрено семейство плоскостей, причем размерности семейства и плоскости произвольны. С помощью способа Лаптева задана групповая связность в расслоении, ассоциированном с семейством. Групповая связность содержит проективную связность. Показано, что в случае неголономности пространства параметров объект кривизны проективной связности является тензором лишь в совокупности с объектом проективной связности и фундаментальным объектом 1-го порядка семейства. Произведено оснащение Бортолотти семейства плоскостей и доказано, что оно индуцирует 2 типа групповой связности в ассоциированном расслоении. Найдены условия совпадения этих типов.