O.M. Z h o v t e n k o

THE ROLE BORTOLOTTI′S EQUIPMENT
OF THE CONGRUENCE OF PLANES

In the projective space group connection is investigated in the bundle, associated with congruence of planes. It is shown, that curvature object of the connection is pseudotensor. Bortolotti′s equipment of the congruence is made. It consist in the giving of field supplementary planes. The notion of covariant differential and covariant derivatives of equipping quasitensor in the group connection is introduced. Covariant derivatives of component of equipping quasitensor is pseudotensor. It is proved, that Bortolotti′s equipment induces two types of group connection in the associated bundle.

УДК 514.75

V.V. K a i s e r

(Friedrich -Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (IV)

Im ersten Teil des Artikels [1] sind die Ergebnisse zusammengefast, im zweiten Teil [2] ist analytischen Apparat gegeben, im dritten [3] Teil werden die Sätze 1.1-1.4 bewiesen und im Schluβteil des Artikels werden die übrigen Sätze 1.5-1.16 bewiesen.

4. Nichtholonome Komplexe. Berechnungen.

4.1. Allgemeine Klassifikation. Wie aus dem Lemma 2.1 folgt, kann jede beliebige 3-dimensionale Distribution K (nichtholonomer Komlex) auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit Hilfe von einer Pfaff'scher Gleichung

$$c_1\Omega^1+ c_2\Omega^2+ c_3\Omega^3+ c_4\Omega^4=0 \qquad (4.1)$$

(local) bestimmt werden, wobei alle glatten Funktionen c_i auf M nicht zusammen verschwinden dürfen.

Es sei $T=t^0A_0+t^1A_1$ ein Punkt auf der laufenden Geraden $l\in M$. Aus (3.2) folgt, daβ der Punkt T der Striktionspunkt (Brennpunkt) einer integralen Torse für K ist, wenn die Gleichungen des Systems (4.1), (3.3) gelten. Das letzte System besitzt bezüglich Ω^i eine Lösung der Gestalt (2.4) mit $\lambda^1=t^0p$, $\lambda^2=t^0q$, $\lambda^3=t^1p$, $\lambda^4=-t^1q$, wo

$$p=t^0c_2-t^1c_4,\ q=-(t^0c_1+t^1c_3). \qquad (4.2)$$

Aus $dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 - \Omega^3 A_2 + \Omega^4 A_3$ (siehe (3.2)) folgt, daβ die Tangentialebene Dieser Torse mit Hilfe von drei Punkten A_0, A_1, pA_2+qA_3 oder von der Gleichung

$$qx^2-px^3=0 \tag{4.3}$$

in homogenen Koordinaten x^i in bezug auf das in 2.1 gewählte begleitende 4-Bein bestimmt wird. Diese Ebene entspricht dem Punkt T in der Hauptkorelation und wird von der Wahl des Punktes T dann und nur dann unabhängig, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

Dies ist die Spezialitätsbedingung des nichtholonomen Komplexes (4.1).

Analog kann man zeigen, daβ das System (4.1), (3.7) eine Torse bestimmt, deren Tangentilebene die durch die Gleichung $x_3x^3+x_4x^4=0$ bestimmte Ebene $\Gamma \supset l$ ist. Diese Torse hat dann auf der Gerade l den Striktionspunkt $p^*A_0+q^*A_1$, wo $p^*=x_2c_4+x_3c_3$, $q^*=x_2c_2-c_1x_3$.Dieser Punkt entspricht dann der Ebene $\tilde{A}$ in der dualen Hauptkorrelation, die für einen nicht speziellen nichtholonomen Komplex gegenteilig zu der Hauptkorrelation ist.

4.2. Spezielle nichtholonome Komplexe. Berechnungen. Wir nehmen weiter unten in dieser Sektion an, daβ die Spezialitätsbedingung (4.4) erfüllt ist. Dann sind Hauptkorrelation und duale Hauprkorrelation ausgeartet. Die erste ordnet jedem Punkt $T \in l$, auβer dem Zentrum

$$Z=c_4A_0+c_2A_1, \tag{4.5a}$$

das auch mit dem Punkt

$$Z=-c_3A_0+c_1A_1 \tag{4.5b}$$

bestimmt werden kann, die Hauptebene

$$\tilde{A}_0=\mathit{Spann}(A_0,A_1,c_4A_2-c_3A_3)=\mathit{Spann}(A_0,A_1,c_2A_2-c_1A_3) \tag{4.6}$$

zu. Im Punkt Z ist entsprechende Ebene unbestimmt. Die zweite (duale Hauptkorrelation) ordnet jeder Ebene $\Gamma \supset l$ (auβer der Hauptebene $\tilde{A}_0$) den Punkt Z zu. Für die Hauptebene ist sie unbestimmt.

Beweis der Sätze 1.5 und 1.6. Sind ein Punkt $T=t^0A_0+t^1A_1$ und eine Ebene $\tilde{A}$ (die letzte mit Hilfe ener Gleichung $x_2x^2+x_4x^3=0$) für die laufende Gerade $l \in M$ gegeben, dann bestimmt die Systeme (3.3) und (3.7) laut dem Beweis der Sätze 1.1 und 1.2 entsprechende nichtholonome Kongruenzen k_1 und k_2 des ersten und des zweiten Typs. Es ist leicht zu sehen, daβ die Matrix des Systems (3.3), (3.7) den Rang=3 hat. Deswegen ist die lineare Hülle der Distributionen k_1 und k_2 3-dimensional und wird von der Pfaff'schen Gleichung

$$t^1x_2\Omega^1+t^1x_3\Omega^2-t^0x_2\Omega^3+t^0x_3\Omega^4=0 \tag{4.7}$$

bestimmt, so daβ auch die Spezialitätsbedingung (4.4) auch erfüllt wird. Aus (4.5a) und (4.5b) folgt, daβ der Punkt T und Ebene $\tilde{A}$ das Zentrum und die Hauptebene der laufenden Geraden $l \in M$ in bezug aud den nichtholonomen Komplexes K mit Hilfe einer Gleichung (4.1) die Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit den Feldern von Punkten (4.5a)-(4.5b) und den Ebenen (4.6). Aus (3.2) folgt, daβ eine Regelfläche (2.4) dann und nur dann eine Integralkurve der Gleichung (4.7) wird, wenn für alle $l\in M$ die Tangente ihrer zentralen Linie im Punkt T in der Ebene $\tilde{A}$ liegt. Dies beendet des Beweis des Satzes 1.5 und des ersten Teils des Satzes 1.6.

Um den zweiten Teil des Satzes 1.6 zu beweisen, bemerken wir, daβ das Pfaff'sche System

$$c_4\Omega^3-c_2\Omega^1=0,\ c_4\Omega^4+c_2\Omega^2=0 \tag{4.8a}$$

oder das System

$$c_1\Omega^1+c_3\Omega^3=0,\ c_1\Omega^2-c_3\Omega^4=0 \tag{4.8b}$$

die zentrale nichtholonome Kongruenz k_1 bestimmt und das System

$$c_1\Omega^1+c_2\Omega^2=0,\ c_1\Omega^3-c_2\Omega^4=0 \tag{4.9a}$$

oder das System

$$c_3\Omega^1+c_4\Omega^2=0,\ c_3\Omega^3-c_4\Omega^4=0 \tag{4.9b}$$

die nichtholonome Kongruenz k_2 des speziellen Komplexes (4.1) laut dem Beweis des Sätze 1.1 und 1.2 bestimmen. Es ist klar, daβ das Differentialsystem

$$\frac{\Omega^1}{c_4}=\frac{\Omega^2}{c_3}=\frac{\Omega^3}{c_2}=\frac{\Omega^4}{c_1} \tag{4.10}$$

den Schnitt von den beiden Distributionen k_1 und k_2 bestimmt. Aus (3.3) und (3.7) folgt, daβ die integralen Regelflächen des richtungsfeldes $k_1\cap k_2$ die Torsen sind, deren Gratpunkte mit den Zentren (4.5a)-(4.5b) übereinstimmen und deren Tangentenebenen die Hauptebenen (4.6) darstellen. Dies beendet den Beweis der Sätze 1.5 und 1.6.

Beweis des Satzes 1.7. Wählen wir ein begleitendes 4-Bein so, daβ der Punkt A_0 das Zentrum Z der laufenden Gerade $l\in M$ bestimmt, und die Ebene $\tilde{A}_0=\mathit{Spann}(A_0,A_1,A_2)$ die Hauptebene für l wird. Aus (4.7) folgt, daβ $c_1=c_2=c_3=0$, $c_4\neq 0$ gelten. Das bedeutet, daβ die Pfaff'sche Gleichung

$$\Omega^4=0 \tag{4.11}$$

eine spezielle nichtholonomen Komplex K bestimmt, und die Differentialsysteme

$$\Omega^3=0,\ \Omega^4=0 \tag{4.12}$$

und

$$\Omega^2=0,\ \Omega^4=0 \tag{4.13}$$

zentrale und fokale nichtholonome Kongruenzen des nichtholonomen Komplexes K bestimmen.

Laut der Lemma 2.1 können wir schreiben:

$$\omega_0^1=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\Omega^i,\ \omega_2^3=\sum_{i=1}^{4}\beta_i\Omega^i\,. \tag{4.14}$$

Aus den Strukturgleichungen mit der Berücksichtigung der Formel (2.3) und (4.14) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
d\Omega^1 &= \Omega^1 \wedge \left(\omega_2^2 - \omega_1^1\right) + \Omega^2 \wedge \omega_3^2 + \Omega^3 \wedge \omega_1^0, \\
d\Omega^2 &= \Omega^2 \wedge \left(\omega_3^3 - \omega_1^1\right) - \Omega^4 \wedge \omega_1^2 + \\
&\quad + \beta_2 \Omega^1 \wedge \Omega^2 + \beta_3 \Omega^1 \wedge \Omega^3 + \beta_4 \Omega^1 \wedge \Omega^4, \\
d\Omega^3 &= \Omega^3 \wedge \left(\omega_2^2 - \omega_0^0\right) - \Omega^4 \wedge \omega_3^2 + \\
&\quad + \alpha_2 \Omega^1 \wedge \Omega^2 + \alpha_3 \Omega^1 \wedge \Omega^3 + \alpha_4 \Omega^1 \wedge \Omega^4, \\
d\Omega^4 &= \Omega^4 \wedge \left(\omega_3^3 - \omega_0^0\right) + \alpha_1 \Omega^1 \wedge \Omega^2 + \beta_1 \Omega^1 \wedge \Omega^3 + \\
&\quad + \left(\beta_2 - \alpha_3\right)\Omega^2 \wedge \Omega^3 - \alpha_4 \Omega^2 \wedge \Omega^4 - \beta_4 \Omega^3 \wedge \Omega^4.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Es sei ein Pfaff'sches System $\Theta^i=0$ $(i=1,...,s)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M angegeben, das eine Distribution Δ auf M bestimmt. Aus der bekannten Formel [4] $d\Theta(X,Y) = X(\Theta(Y)) - Y(\Theta(X)) - d\Theta(X,Y)$, wo X, Y glatte Vektorfelder auf M sind, folgt, daβ das Pfaff'sche System, das die nichtholonome Erweiterung [5] der Distribution Δ bestimmt, aus den Gleichung der Gestalt $\sum_{i=1}^{s} f_i \Theta^i = 0$ besteht, wo die glatte Funktionen f^i auf M die Gleichungen $\sum_{i=1}^{s}\left(f_i d\Theta^i\right) \wedge \Theta^1 \wedge ... \wedge \Theta^s = 0$ erfüllen. Aus dieser Bemerkung und aus (4.15) folgt, daβ die Gleichung

$$\alpha_1\Omega^3 - \alpha_2\Omega^4 = 0 \tag{4.16}$$

die nichtholonome Erweiterung $I(k_1)$ für die Distribution k_1 bestimmt, und die Gleichung

$$\beta_1\Omega^2 - \beta_3\Omega^4 = 0 \tag{4.17}$$

die nichtholonome Erweiterung $I(k_2)$ für die Distribution k_2 bestimmt. Es ist klar, daβ die Spezialitätsbedingung (4.4) für die von den Gleichungen (4.16) und (4.17) bestimmten nichtholonomen Komplexe erfüllt ist. Aus (4.5a), (4.5b) und (4.6) folgt, daβ das Zentrum der Gerade A_1A_2 in bezug auf den nichtholonomen Komlex $K_1=I(k_1)$ der Punkt A_0 ist und daβ die Hauptebene dieser Gerade in bezug auf $K_2=I(k_2)$ die Ebene $\tilde{A}_0=$*Spann*(A_0,A_1,A_3) ist. Damit ist der Bewes des Satzes 1.7 beendet.

Beweis des Sätze 1.8 und 1.9. Aus (3.2), (4.12) und (4.13) folgt, daβ die integralen Regelflächen der 1-dimensionalen mit Hilfe vom System

$$\Omega^2=\Omega^3=\Omega^4=0 \tag{4.18}$$

bestimmten Sonderdistribution die Torsen mit dem Gratpunkt $Z=A_0$ und mit der Tangentenebene $\tilde{A}_0=$*Spann*(A_0,A_1,A_2) sind.

Aus (3.2) folgt

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \left(\alpha_1\Omega^1 + \alpha_2\Omega^2\right)A_1 + \left(\alpha_3 A_1 - A_2\right)\Omega^3 + \left(\alpha_4 A_1 + A_3\right)\Omega^4$$

Sind die Integritätsbedingungen $\alpha_1=\alpha_2=0$ für die zentrale nichtholonome Kongruenz k_1 nicht erfüllt, existiert eine 1-dimensionale konische Distribution mit integralen konischen Regelflächen, deren Spitzen die Zentren der Geraden $l \in M$ sind. Sie ist dann mir Hilfe von der Differentialsystem

$$\alpha_1\Omega^1+\alpha_2\Omega^2=0,\ \Omega^3=\Omega^4=0 \qquad (4.19)$$

bestimmt. Die tangenntialfläche der Kegel (4.19) ist mit der Hilfe der Gleichung $\alpha_1 x^2+\alpha_2 x^3=0$ bestimmt.

Aus (2.1) und (4.14) nach der Regel der Differentierung des äuβeren Produktes von Differentialformen haben wir: $d(A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) =$

$$= (\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2)A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 + \Omega^2(-A_0 \wedge A_2 \wedge A_3 + \beta_2 A_0 \wedge A_1 \wedge A_3) +$$
$$+ \Omega^4(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 + \beta_4 A_0 \wedge A_1 \wedge A_3) + (\beta_1\Omega^1+\beta_3\Omega^3)A_0 \wedge A_1 \wedge A_3$$

Sind die Integritätsbedingungen $\beta_1=\beta_3=0$ für die fokale nichtholonome Kongruenz k_2 nicht erfüllt, existiert eine 1-dimensionale Distribution mit flachen integralen Torsen, deren Erzeugenden in den Hauptebenen liegen. Sie ist dann mit Hilfe vom Differentialsystem

$$\beta_1\Omega^1+\beta_3\Omega^3=0,\ \Omega^2=\Omega^4=0 \qquad (4.20)$$

bestimmt. Der Punkt $F=\beta_3 A_0-\beta_1 A_1$ ist der Gratpunkt der Torse (4.20). Das beendet den Beweis, da die Bedingung $\alpha_1=0$ den Bedingungen 1), 2) und 3) des Theorems 1.8 äquivalent ist und da die Bedingung $\beta_1=0$ den Bedingungen 1), 2) und 3) des Theorems 1.9 äquivalent ist.

Beweis des Satzes 1.10. Es seien Δ_1 und Δ_1^* zwei 1-dimensionalen Unterdistributionen eines nichtholonomen Komlexes K, der mit Hilfe von der Differentialgleichung (4.11) gegben ist. Bestimmen wir die Distributionen Δ_1 und Δ_1^* mit Hilfe vo den Differentialsystemen (2.4), wo $\lambda^1=\xi^1$, $\lambda^2=\xi^2$, $\lambda^3=\xi^3$, $\lambda^4=0$ für Δ_1 und $\lambda^1=\eta^1$, $\lambda^2=\eta^2$, $\lambda^3=\eta^3$, $\lambda^4=0$ für Δ_1^* gewählt sind. Aus (2.1), (2.3) und (4.14) haben wir

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + (\alpha_1\Omega^1+\alpha_2\Omega^2)A_1 + (\alpha_3 A_1 - A_2)\Omega^3 + (\alpha_4 A_1 - A_3)\Omega^4.$$

Deswegen gilt für die Tangente T der zentralen Linie von der integralen Regelfläche S der Didribution Δ_1: T=*Spann*($A_0,\rho A_1-\xi_3 A_2$), wo $\rho=\sum_{i=1}^3 \alpha_i\xi^i$. Diese Tangente ist für die konische Distribution (4.19) unbestimmt. Wir nehmen an, daβ die Disribution Δ_1 nicht konisch ist. Betrachten wir dann einen beliebigen Punkt $Q=sA_0+t(\rho A_1-\xi_3 A_2)$ dieser Tangente. Aus (2.1), (2.3) und (4.14) haben wir $dQ=\theta^0 A_0+\theta^1 A_1+\theta^2 A_2+((s+t\beta_4)\Omega^4+t(-\beta_1\xi_3\Omega^1+(\rho-\xi^3\beta^2)\Omega^2-\xi^3\beta_3\Omega^3)A_3$, wo θ^i (i=1,2,3) einige glatte 1-Formen aus M sind. Daraus folgt, daβ die durch die Tangente T durchgehende integrale Regelfläche der Distribution Δ_1^* eine Torse ist (mit der Tangentialebene, die mit der Hauptebene *Spann*(A_0,A_1,A_2) übereinstimmt), wenn gilt $-\beta_1\xi^3\eta^1+(\rho-\xi^3\beta_2)\eta^2-\beta_3\xi^3\eta^3=0$ oder wenn gilt:

$$\Xi^T D \Xi_*=0, \qquad (4.21)$$

wo die Matrix D folgende Gestalt hat:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_3 - \beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

wobei $\Xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)^T$, $\Xi_*=(\eta^1,\eta^2,\eta^3)^T$ und das Zeichen T das Transponieren bedeutet. Die Simmetrie-Bedingungen $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3-\beta_2=0$ der Matrix D bedeuten die Gegenseitigkeit des Konjugiertsens in bezug auf K. Das beendet den Beweis des Satzes 1.10, da diese Bedingungen auch die Integritätsbedingungen der Gleichung (4.11) darstellen.

Beweis des Satzes 1.11. Aus (4.12) und (4.13) folgt, daβ wenn der Vektor $\Xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)^T$ eine 1-dimensionale Unterdistribution $\Delta_1\subset k_1$ oder $\Delta_1\subset k_2$ bestimmt, dann gilt entsprechend: $\xi^3=0$ oder $\xi^2=0$. Aus (4.22) folgt, daβ für Vektoren Ξ, Ξ_* mit $\xi^3=0$, $\eta^2=0$ gilt (4.21). Dies beweist den ersten Teil des Satzes. Aus (4.20) folgt, daβ für die Distribution Δ_1^*=*glatt* gilt $\eta^1=\beta_3$, $\eta^2=0$, $\eta^3=\beta_1$. Wenn $\xi^3=0$, dann gilt ebenfalls (4.21). Dies beweist den zweiten Teil des Satzes. Um den dritten Teil zu beweisen, bemerken wir, daβ die charakterische Distribution $ch(\Delta)$ einer mitt Hilfe von einer Differentialsystem $\omega^\alpha=0$, (α=m+1,...,n) auf einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M gegebenen m-demensionalen Disrtibution Δ mit Hilfe von der Differentialsystem $\omega^\alpha=0$, $\sum_{j=1}^m C_{ij}^\alpha \omega^j = 0$, (i=1,...,m, α=m+1,...,n) bestimmt wird. Hier bilden die Pfaff'sche Formen ω^i (i=1,...,m) zusammen mit den linear unabhängigen glatten 1-Formen ω^α (i=m+1,...,n) eine Basis des Rings der Differentialformen, und glatte Funktionen C_{ij}^α treten in folgenden Gleichheiten auf:

$$d\omega^\alpha \wedge \omega^{m+1} \wedge ... \wedge \omega^n = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^{m+1} \wedge ... \wedge \omega^n,$$

so daβ gelten: $C_{ij}^\alpha = -C_{ji}^\alpha$. Aus (4.15) folgt, daβ es gilt:

$$d\Omega^4 \wedge \Omega^4 = \sum_{i,j=1}^{3} C_{ij} \Omega^i \wedge \Omega^j \wedge \Omega^4,$$

wo $C_{12} = -C_{21} = -\frac{\alpha_1}{2}$, $C_{13} = -C_{31} = \frac{\beta_1}{2}$, $C_{23} = -C_{32} = \frac{\beta_2 - \alpha_3}{2}$. Das charakteristische System [6] der Pfaff'sche Gleichung (4.11) hat den Rang=3 (im Fall wenn sie nicht integrierbar ist) und ist dem System

$$\frac{\Omega^1}{\beta_2 - \alpha_3} = \frac{\Omega^2}{\beta_1} = \frac{\Omega^3}{-\alpha_1}, \quad \Omega^4 = 0 \tag{4.23}$$

äquivalent. Aus (4.22) folgt, daβ für Vektoren $\Xi_*=(-\alpha_2,\alpha_1,0)$ und $\Xi=((\beta_2-\lambda_3),\beta_1,-\alpha_1)$ beide Bedingungen $\Xi^T D \Xi_*=0$ und $\Xi_*^T D \Xi = 0$ erfüllt sind. Dies beendet den Beweis des Satzes 1.11.

4.3. Anwendungen zur Theorie nichtholonomer Kongruenzen. Berechnungen. Hier werden die Sätze 1.12-1.16 bewiesen.

Beweis des Satzes 1.12 und der Folgerung 1.13. Das System (3.1) bestimme eine hypebolische nichtholonome Kongruenz. Man wähle ein begleitendes 4-Bein, so daβ die Punkte A_0, A_1 die Brennpunkte bestimmen und die Ebenen $\tilde{A}_0$=*Spann*(A_0,A_1,A_2) und $\tilde{A}_1$=*Spann*(A_0,A_1,A_3) die entsprechende Brennebenen sind. Aus (3.4), (3.8) und (3.10) folgt dann $q^{12}=q^{34}=0$, $q^{24}=q^{13}=0$, $q^{14}q^{23}=0$, $q^{14}+q^{23}\neq 0$, $q^{14}-q^{23}\neq 0$, wo die Funktionen q^{ij} von den Gleichheit (3.6) bestimmen werden. Das System, das aus der Gleichungen (3.1) und (3.3) für $t^1=0$ besteht, bestimmt eine Torse mit dem Gratpunkt A_0. Ist die Ebene $\tilde{A}_0$ die Tangentialebene dieser Torse, dann ist diese Torse auch vom dem System bestimm, das aus der Gleichungen (3.1) und (3.7) für $x_2=0$ besteht. Aus der Äquivalenz beider Systeme folgt $a_1=b_1=0$. Analog wird es bewiesen, daβ $a_4=b_4=0$ gelten. Dann gelten auch $q^{14}=0$, $q^{23}\neq 0$. Das System (3.1) wird jetzt dem System $\Omega^2=\Omega^3=0$ äquivalent.

Die Spezialitätsbedingung (4.4) zeigt, daβ es genau zwei spezielle nichtholonome Komlexe K_1 und K_2 gibt, die eine hyperbolische nichtholonome Kongruenz k enthalten [7]. Sie werden mit Hilfe von der Gleichungen $\Omega^3=0$ und $\Omega^2=0$ entsprechend bestimmt. Aus (4.5a), (4.5b) und (4.6) folgt, daβ die Zentren der Geraden $l\in M$ in bezug auf K_1 und K_2 mit den Brennpunkten von k übereinstimmen und die Hauptebenen mit den Brennebenen der Geraden l übereinstimmen. Die nichtholonome Komlexe K_1 und K_2 sind dabei laut dem Satz 1.5 von der Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit den glatten Feldern der in bezug auf k nicht entsprechenden Paare von Brennpunkten und Brennebenen erzeugt. Dies bewest die gerade Behauptung des Satzes 1.12.

Wir bemerken, daβ es für eine hyperbolische nichtholonome Kongruenz k noch zwei nichtholonome Komlexe K_3 und K_4 gibt, deren Zentren und Hauptebenen mit den Brennpunkten und Brennebenen für k übereinstimmen und die von der Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit mit den glatten Feldern von in bezug auf k entsprechenden Paaren von Brennpunkten und Brennebenen (laut dem Satz 1.5) erzeugt sind.

Diese speziellen nichtholonomen Komplexe K_3 und K_4 enthalten nicht die nichtholonome Kongruenz k und sind mit den Gleichungen $\Omega^4=0$ und $\Omega^1=0$ entsprechend bestimmt. Die nichtholonome Kongruenz $k^*=K_3\cap K_4$ wird mit Hilfe des Systems $\Omega^1=0$, $\Omega^2=0$ bestimmt und stellt deswegenn eine komplementäre Distribution für k dar. Dies beweist die Folgerung 1.13.

Um die gegenseitige Behauptung des Satzes 1.12 zu beweisen, nehmen wir an, daβ die Paare $\{Z_1,\tilde{A}_1\}$ und $\{Z_2,\tilde{A}_2\}$ glatter Felder von unterschriedlichen Punkten und Ebenen der Geraden $l\in M$ laut dem Satz 1.5 spezielle nichtholonome Komplexe K_1 und K_2 bestimmen. Wählen wir ein begleitendes 4-Bein so, daβ $A_0=Z_1$, $A_1=Z_2$, $\tilde{A}_1$=*Spann*(A_0,A_1,A_3), $\tilde{A}_2$=*Spann*(A_0,A_1,A_2). Aus (4.10) folgt dann, daβ K_1 und K_2 mit Hilfe von der Gleichungen $\Omega^3=0$ und $\Omega^2=0$ entsprechend bestimmt werden. Die nichtholonome Kongruenz $k=K_1\cap K_2$ wird mit Hilfe vom System (3.1) mit $a_1=a_2=0$,

$a_3=1$, $a_4=0$, $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=b_4=0$ bestimmt. Aus (3.4)-(3.6), (3.8)-(3.9) folgt jetzt, daβ die Punkte A_0, A_1 die Brennpunkte für k und die Ebenen $\tilde{A}_1$ und $\tilde{A}_2$ die Brennebenen sind. Das bedeutet, daβ k hyperbolisch ist. Dies beendet den Beweis des Satzes 1.12.

Beweis der Sätze 1.14 und 1.15. Es seien A_0 der Brennpunkt und die Brennebene $\tilde{A}=$*Spann*(A_0,A_1,A_2) einer parabolischen nichtholonomen Kongruenz k. Aus (3.4)-(3.5) und (3.8)-(3.9) haben wir dann: $q^{12}=q^{14}=q^{13}=q^{23}=0$, $q^{24}\neq 0$, $q^{34}\neq 0$. Deswegen ist das System (3.1) dem folgenden System äquvalent: $\Omega^4=0$, $f_2\Omega^2+f_3\Omega^3=0$, wo $f_2=q^{24}\neq 0$, $f_3=q^{34}\neq 0$ glatte Funktionen auf Grassmann'schen Mannigfaltigkeit sind.

Jeder beliebige nichtholonome Komlex $K\supset k$ kann mit Hilfe der Gleichung $\alpha(f_2\Omega^2+f_3\Omega^3)+\beta\Omega^4=0$ bestimmt werden. Die Spezialitätsbedingung (4.4) gibt $\alpha=0$. Der nichtholonome Komplex K_0, der mit Hilfe der Gleichung $\Omega^4=0$ bestimmt wird, ist deswegen der einzige spezielle nichtholonome Komplex, der die nichtholonome Kongruenz k enthält. Dies beendet den Beweis des Satzes 1.14, da der Punkt A_1 das Zentrum der Gerade A_1A_2 in bezug auf K_0 ist und die Ebene $\tilde{A}$ die Hauptebene ist.

Um den Satz 1.15 zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen nichtholonomen Komplex $K\supset k$, der mit Hilfe von der Gleichung $\alpha(f_2\Omega^2+f_3\Omega^3)+\beta\Omega^4=0$ mit $\alpha\neq 0$ bestimmt wird. Aus (4.2) und (4.3) folgt, daβ seine Hauptkorrelation dem Brennpunkt A_0 die Brennebene $\tilde{A}$ zuordnet.

Nehmen wir jetzt an, daβ das System (3.1) eine nichtspezielle nichtholonome Kongruenz k bestimmt. Die erste Gleichung des Systems (3.1) bestimme eine speziellen nichtholonomen Komplex K. Seien A_0 das Zentrum und $\tilde{A}=$*Spann*(A_0,A_1,A_2) die Hauptebene der Gerade A_0A_1 in bezug auf K. Dann folgen aus (4.5a), (4.5b) und aus (4.6): $a_1=a_2=a_3=0$. Bestimmt die zweite Gleichung in (3.1) einen nichtspeziellen nichtholonomen Komplex k, dessen Hauptkorrelation dem Zentrum A_0 die Ebene $\tilde{A}$ zuordnet, wird die Gleichheit $b_1=0$ aus (4.3) folgen. Das System (3.1) wird dann dem System $b_2\Omega^2+b_3\Omega^3=0$, $\Omega^4=0$ äquivalent. Aus (3.5), (3.6) und (3.9) folgt, daβ die Bedingung $b_2=0$ oder $b_3=0$ bedeutet, daβ k eine spezielle nichtholonome Kongruenz (entsprechend des zweiten oder des ersten Typs) ist. Wenn es nicht der Fall ist, wird auch der nichtholonome Komplex K nicht speziell. Aus (4.3) folgt dann,das seine Hauptkorrelation dem Punkt A_0 die Ebene $\tilde{A}$ zuordnet. Dies beendet den Beweis.

Beweis des Satzes 1.16. Wähhlen wir ein begleitendes 4-Bein so, daβ A_0 und $A_0A_1A_2$ entsprechend das Zentrum und die Hauptebene der laufenden Geraden A_0A_1 in bezug auf einen speziellen nichtholonomen Komplex K sind. Dann wird K mit Hilfe von der Pfaff'schen Gleichung (4.11) bestimmt. Betrachten wir eine 2-dimensionale Unterdistribution $k\subset K$. Wir können sie mit Hilfe von der Pfaff'schen System $\Omega^4=0$, $b_1\Omega^1+b_2\Omega^2+b_3\Omega^3=0$ bestimmen, wo b_1, b_2, b_3 glatte Funktionen auf M sind. Die Gleichungen (3.4) und (3.8) für Brennpunkte und Brennebenen werden entsprechen zu den Gleichungen $(b_1t^0+b_3t^1)t^1=0$ und $(b_2x_2-b_1x_3)x_2=0$ reduziert. Dies bedeutet, daβ die nichtholonome Kongruenz k dann und nur dann parabolisch wird, wenn gelten:

$b_1=0$, $(b_2)^2+(b_3)^2\neq 0$. Sie wird speziell des ersten Typs, wenn gelten: $b_1=b_2=0$, d.h. wenn k die zentrale nichtholonome Kongruenz k_2 für K ist. Daraus folgt, daβ alle 2-dimensionalen Distributionen, die die 1-dimensionale Sonderdistribution (4.18) enthalten und deswegen mit Hilfe von einem System

$$\Omega^4=0,\ b_2\Omega^2+b_3\Omega^3=0 \tag{4.24}$$

mit glatten Funktionen b_2 und b_3 bestimmt werden, sind parabolisch mit der Ausnahme von zentraler k_1 ($b_2=0$) und fokaler k_2 ($b_3=0$) speziellen nichtholonomen Kongruenzen des speziellen nichtholonomen Komplexes K. Selbst der spezielle nichtholonome Komplex K ist der abgleitete nichtholonome Komplex für alle parabolischen nichtholonomen Kongruenzen (4.24). Fixieren wir jetzt eine nichtholonome Kongruenz k aus diesem Büschel von nichtholonomer Kongruenz (4.24) und suchen solche Richtungsfelder (2.4) aus k, die zentralen Kurven der integralen Regelflächen von denen die asymptotischen Kurven dieser Regelflächen sind. Aus (2.1), (2.2) und (4.14) erhalten wir

$$d^2A_0=\theta^0A_0+\theta^1A_1+\theta^2A_2+\Big\{\Big(\big(\omega_0^0+\omega_3^3\big)+\alpha_4\Omega^2-\beta_4\Omega^3\Big)\Omega^4+\alpha_1\Omega^1\Omega^2+$$
$$+\alpha_2\big(\Omega^2\big)^2+\big(\alpha_3-\beta_2\big)\Omega^2\Omega^3-\beta_1\Omega^1\Omega^3-\beta_3\big(\Omega^3\big)^2\Big\}A_3,$$

wo die konkrete Ausdrück für die differentiellen Formen θ^i für uns nicht interessant sind. Gehört das Richtungsfeld (2.4) der Distribution (4.24), gelten: $b_2\lambda_2+b_3\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$. Daraus folgt, daβ dia zentrale Kurve der integralen Regelfläche dieses Richtungsfeldes eine asymptotische Kurve ist, wenn dazu noch gilt:

$$\lambda_2\Big(b_3\big(\alpha_1b_3+\beta_1b_2\big)\lambda_1+\Big(\alpha_2b_3^2-b_2b_3\big(\alpha_3-\beta_2\big)-b_2^2\beta_3\Big)\Big)=0.$$

Die erste Lösung $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ gibt uns die Sonderdistribution (4.18). Die zweite Lösung gibt uns die asymptotische Tangente T(k), die aus (2.1) und (2.4) folgenderweise bestimmt werden kann: $T(k)=\mathit{Spann}(A_0,b_3P-b_2Q)$, wo $P=AA_1-\alpha^1A_2$, $Q=BA_1+\beta_1A_2$ und $A=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, $B=\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1$. Aus (3.2) und (4.14) folgt, daβ die erste singuläre Gerade l_1 als die Tangente der zentraler Kurve der charakteristischen Regelfläche (4.23) folgenderweise bestimmt werden kann: $l_1=\mathit{Spann}(A_0,P)$. Dualerweise wird die zweite singuläre Gerade l_2 als die Charakteristik der 1-parametrischen Schar von Hauptebenen der Geraden derselben charakteristischen Regelfläche (4.23) folgenderweise bestimmt: $l_2=\mathit{Spann}(A_0,Q)$, daraus folgt, daβ der nichtholonome Komplex K ausgeartet wird, wenn gilt: $A\beta_1+B\alpha_1=0$. Wenn es nicht der Fall ist, wird die Abbildung $k\rightarrow T(k)$ umkehrbar eindeutig. Um den Beweis des Satzes 1.16 zu beenden, ist es jetzt genug zu bemerken, daβ $T(k_1)=l_1$, $T(k_2)=l_2$ gelten.

Literatur

1. *Kaiser V.V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (I) // Диф. геом. многообр фигур. Калининград, 1997. № 28. С. 38-47.

2. *Kaiser V.V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (II) // Там же, 1998. № 29. С. 28-31.

3. *Kaiser V.V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (III) // Там же, 1999. № 30. С. 30-34.

4. *Spivak M.* A comprechensive introduction to differential geometry. Boston, 1970. Vol. 1.

5. *Wagner V.V.* Differentialgeometrie nichtholonomer Mannigfaltigkeite // VIII Internationaler Lobatschevsky-Wettbewerb (1937). Kazan, 1939. S. 195-262.

6. *Gardner R.B.* Invariants of pfaffian systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. 126, № 3. P. 514-533.

7. *Sussmann H.J.* Orbits of families of vektor fields and integrabiliti of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 180. № 6. P. 171-188.

В.В. К а й з е р

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ (IV)

В 1-й части работы [1] сформулированы результаты, во 2-й части [2] приведен аналитический аппарат, в 3-й части [3] доказаны предложения 1.1-1.4. В настоящей заключительной части работы доказаны остальные предложения 1.5-1.16.