УДК 514.76

А. Я. Султанов[1], Г. А. Султанова[2], О. А. Монахова[3]
[1, 3] Пензенский государственный университет, Россия
[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. А. В. Хрулева (Пенза), Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] oxmonakh@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

О группе автоморфизмов алгебры плюральных чисел

В работе исследуются автоморфизмы алгебр плюральных чисел, которые являются обобщением алгебры дуальных чисел. Алгебры плюральных чисел оказались в центре внимания профессора Казанского университета А. П. Широкова. Занимаясь геометрией касательных расслоений высших порядков, он установил, что касательные расслоения высших порядков над гладкими многообразиями несут структуру гладкого многообразия над алгебрами плюральных чисел. Это позволило ему в 1970-е годы построить теорию лифтов тензорных полей и линейных связностей с гладкого многообразия в его касательные расслоения произвольного порядка.

Изучаются автоморфизмы алгебры плюральных чисел. Доказано, что множество всех автоморфизмов алгебры плюральных чисел образует группу. Описано строение этой группы. В качестве примеров указаны группы автоморфизмов алгебры плюральных чисел, имеющих небольшую размерность.

Ключевые слова: алгебра плюральных чисел, автоморфизм, векторное пространство, матрица автоморфизма

Поступила в редакцию 27.04.2023 г.

1. Алгебра плюральных чисел

Рассмотрим -мерное векторное пространство V над полем действительных чисел R с базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1})$, на котором задана билинейная операция умножения, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varepsilon^0\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\alpha\varepsilon^0 = \varepsilon^\alpha,$$
$$\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta} \ (\alpha, \beta = 1,2,\dots, m-1), \qquad (1)$$
$$\varepsilon^m = 0 \quad (m = dim\, V).$$

Полученная линейная алгебра называется алгеброй плюральных чисел и обозначается символом $R(\varepsilon^{m-1})$ [1]. Из этого определния следует, что элемент ε^0 является единичным элементом алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$. Будем считать, что $e^0 = 1$ (1 — единица поля R). Из определения базисных элементов следует, что алгебра $R(\varepsilon^{m-1})$ является коммутативной и ассоциативной.

Соотношение $\varepsilon^m = 0$ дает основания к заключению, что каждый базисный элемент ε^α $(\alpha = 1,2,\dots, m-1)$ является делителем нуля. Векторное подпространство, натянутое на эти элементы, является идеалом алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$, причем максимальным. Этот идеал называется радикалом алгебры плюральных чисел и обозначается $Rd(R(\varepsilon^{m-1}))$. Перейдем к автоморфизмам алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$.

Определение. Обратимый линейный оператор

$$\phi: R(\varepsilon^{m-1}) \to R(\varepsilon^{m-1})$$

называется *автоморфизмом* этой алгебры, если выполняются условия $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ для любых $x, y \in R(\varepsilon^{m-1})$.

Иначе говоря, автоморфизм алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ плюральных чисел представляет собой изоморфное отображение этой алгебры на себя. Множество всех автоморфизмов алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ обозначается символом $Aut(R^{m-1})$.

Теорема 1. *Для любого автоморфизма* ϕ *алгебры плюральных чисел имеет место равенство* $\phi(1) = 1$.

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный автоморфизм алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$. Тогда для любого элемента $a \in R(\varepsilon^{m-1})$ имеем

$$\phi(1)a = \phi(1)(\phi \circ \phi^{-1}(a)) = \phi(1)(\phi(\phi^{-1}(a))) =$$
$$= \phi(1 \cdot \phi^{-1}(a)) = \phi(\phi^{-1}(a)) = a.$$

Аналогично $a\phi(1) = a$. Поскольку в алгебре $R(\varepsilon^{m-1})$ имеется только одна единица, то $\phi(1) = 1$.

Теорема 2. *Для любого автоморфизма* $\phi \in Aut(R^{m-1})$ *имеем* $\phi(\varepsilon^1) = x_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 1,2,\dots,m-1)$.

Доказательство. Пусть

$$\phi(\varepsilon^1) = a_0\varepsilon^0 + a_\alpha\varepsilon^\alpha(\alpha \neq 0).$$

Тогда

$$\phi(\varepsilon^2) = \phi(\varepsilon^1\varepsilon^1) = \phi(\varepsilon)\phi(\varepsilon^1) = (a_0\varepsilon^0 + a_\alpha\varepsilon^\alpha)(a_0\varepsilon^0 +$$
$$+a_\beta\varepsilon^\beta) = (a_0)^2\varepsilon^0 + b,\ \ b \in Rd(R(\varepsilon^{m-1}).$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$\phi(\varepsilon^k) = (a_0)^k\varepsilon^0 + c, \qquad c \in Rd(R(\varepsilon^{m-1}))$$

для любого натурального числа $k < m - 1$. При $k = m - 1$ имеем следующее равенство:

$$\theta = (a_0)^{m-1}\varepsilon^0 + d,\ \ d \in Rd(R(\varepsilon^{m-1})).$$

Отсюда следует $(a_0)^{m-1} = 0$ и $d = 0$. Следовательно, $a_0 = 0$. Теорема 2 доказана.

2. Описание группы автоморфизмов алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$

В п. 1 было отмечено, что базис алгебры $A = R(\varepsilon^{m-1})$ составляют элементы $1,\ \varepsilon = \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$. Здесь ε^α является степенью элемента $\varepsilon = \varepsilon^1$. Для каждого автоморфизма

$\phi \in AutA$ мы получим, что $\phi(\varepsilon) = t_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 1,2,\ldots,m-1)$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ — произвольные действительные числа (параметры).

Тогда в силу того, что ϕ — автоморфизм алгебры A, можно найти образы остальных базисных элементов, то есть $\phi(\varepsilon^\tau)$ $(\tau = 2,3,\ldots,m-1)$:

$$\phi(\varepsilon^\tau) = (\phi(\varepsilon))^\tau = \left(t_{\lambda_1}\varepsilon^{\lambda_1}\right) \ldots (t_{\lambda_\tau}\varepsilon^{\lambda_\tau}) =$$

$$= t_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\tau}\varepsilon^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\lambda}.$$

Пусть $\phi(\varepsilon^\lambda) = \phi_\mu^\lambda \varepsilon^\mu$, $\lambda, \mu = 1,2,\ldots,m-1$. Тогда получим, что $\phi_\mu^1 = t_\mu$, а

$$\phi_\nu^{\tau+1} = \phi_\lambda^\tau t_{\nu-\lambda}, \tag{*}$$

где по индексу λ ведется суммирование от 1 до $m-1$ при условии $\nu - \lambda > 0$. Если $\nu - \lambda \leq 0$, то по определению будем считать, что $t_{\nu-\lambda} = 0$.

Теорема 3. *Коэффициенты ϕ_μ^λ удовлетворяют тождествам*

1) ϕ_μ^λ=0, *если* $\mu < \lambda$;

2) $\phi_\lambda^\lambda = (t_1)^\lambda$ (*по индексу нет суммирования*) *для* $\lambda = 1, 2, \ldots, m-1$.

Доказательство.

1. Доказательство проведем методом математической индукции по $\lambda \geq 2$ и $\mu \geq 1$.

Пусть λ — фиксированное натуральное число, равное $2, 3, \ldots, m-1$. Докажем, что ϕ_μ^λ=0 для всех $\mu < 2$.

При $\mu = 1$ имеем $\phi_1^\lambda = \phi_\nu^\lambda t_{1-\nu}$, $\nu \geq 1$. Но $t_{1-\nu} = 0$ при $1 - \nu \leq 0$. Следовательно, $\phi_1^\lambda = 0$.

Предположим, что $\phi_\mu^\lambda = 0$ для всех $\mu < \lambda - 2$.

Докажем, что $\phi_{\lambda-1}^\lambda = 0$. В силу равенства (*) имеем $\phi_{\lambda-1}^\lambda = \phi_\nu^\lambda t_{(\lambda-1)-\nu}$. Если $\nu \leq \lambda - 2$, то $\phi_\mu^\lambda = 0$ по индуктивному предположению. Поэтому $\phi_{\lambda-1}^\lambda = 0$.

2. Применим также метод математической индукции.

При $\lambda = 1$ соотношение 2) настоящей теоремы имеет вид $\phi_1^1 = t_1$. С другой стороны, $\phi(\varepsilon^1) = \phi(\varepsilon) = t_\lambda \varepsilon^\varepsilon$. Отсюда $\phi_1^1 = t_1$.

Пусть $\phi_\lambda^\lambda = (t_1)^\lambda$ для каждого фиксированного $\lambda < m - 1$.

Докажем, что $\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = (t_1)^{\lambda+1}$. Для этого рассмотрим (*). Из него получим, что

$$\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = \phi_\mu^\lambda t_{(\lambda+1)-\mu},$$

где по индексу μ ведется суммирование (при условии $(\lambda + 1) - \mu \geq 0$). По индуктивному предположению, $\phi_\mu^\lambda = 0$, если $\mu < \lambda$. Поэтому при $\mu \geq \lambda$ имеем $(\lambda + 1) - \mu \leq 1$. Отсюда следует, что $(\lambda + 1) - \mu = 1$ (иначе: $t_{(\lambda+1)-\mu} = 0$). Таким образом,

$$\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = \phi_\lambda^\lambda t_1 = \left(t_1^\lambda\right) t_1 = (t_1)^{\lambda+1}.$$

Утверждение 2) теоремы 3 доказано.

Из теоремы 3 следует, что матрица произвольного автоморфизма ϕ алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ относительно ее естестественного базиса имеет вид

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & t_2^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \phi_{m-1}^1 & \phi_{m-1}^2 & \dots & (t_1)^{m-1} \end{pmatrix}, \; t_1 \neq 0.$$

Следовательно,

$$dim\, A\, ut(R(\varepsilon^{m-1})) = m - 1 = dim(\, R^{m-1}).$$

Можно рассмотреть вид матрицы $M(\phi)$ для второго, третьего и четвертого порядков:

$$AutR(\varepsilon) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} | t_1 \in R, t \neq 0 \right\},$$

$$AutR(\varepsilon^2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & t_2 & (t_1)^2 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in R, t_1 \neq 0 \right\},$$

$$AutR(\varepsilon^3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & (t_1)^2 & 0 \\ 0 & t_3 & 2t_1t_2 & (t_1)^3 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2, t_3 \in R, t_1 \neq 0 \right\}.$$

Эти матрицы представляют группы автоморфизмов алгебры плюральных чисел в частных случаях.

Список литературы

1. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

2. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М., 2001.

3. *Кертис И., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.

4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1—3. М., 2000.

5. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1962.

6. *Никитина Я. В., Султанов А. Я.* Расслоение Вейля над тензорным произведением двух алгебр дуальных чисел // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 4, №28. С. 17—28.

7. *Султанов А. Я.* О группах автоморфизмов специальных линейных алгебр // Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского. 2010. Т. 8, №22. С. 70—74.

8. *Султанова Г. А.* О размерностях алгебр Ли автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой // Дальневост. матем. журн. 2016. Т. 16, №1. С. 83—95.

9. *Султанова Г. А.* Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 146—153.

10. *Широков А. П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1973. Т. 5. С. 259—309.

Для цитирования: *Султанов А.Я., Султанова Г.А., Монахова О.А.* О группе автоморфизмов алгебры плюральных чисел // ДГМФ. 2023. № 54 (2). С. 63—70. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-6.

MSC 53B15

A. Ya. Sultanov[1], G. A. Sultanova[2], O. A. Monakhova[3]
[1, 3] Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[2] Branch of the Military Academy of Logistics named after A. V. Khrulev
Penza-5, Penza region, 440005, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] oxmonakh@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

On the group of automorphisms of the algebra of plural numbers

Submitted on April 27, 2023

The algebra of dual numbers was first introduced by V. K. Clifford in 1873. The algebras of plural and dual numbers are analogous to the algebra of complex numbers. Dual numbers form an algebra, but not a field, because only dual numbers with a real part not equal to zero have an inverse element.

In this work, automorphisms of algebras of plural numbers, which are a generalization of the algebra of dual numbers, are studied. Algebras of plural numbers were in the center of attention of the professor of Kazan University A. P. Shirokov. Studying the geometry of higher-order tangent bundles, he established that higher-order tangent bundles over smooth manifolds have the structure of a smooth manifold over algebras of plural numbers. This allowed him in the 70s of the twentieth century to construct a theory of lifts of tensor fields and linear connections from a smooth manifold to its tangent bundles of arbitrary order.

In this paper, we study automorphisms of the algebra of plural numbers. It is proved that the set of all automorphisms of the algebra of plural numbers forms a group. The structure of this group is described. The groups of automorphisms of the algebra of plural numbers with small dimension are indicated as examples.

Keywords: plural algebra, automorphism, vector space, matrix of automorphism

References

1. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan (1984).

2. *Vinberg, E. B.:* Course of algebra. Moscow (2001).

3. *Curtis, I., Reiner, I.:* Theory of representations of finite groups and associative algebras. Moscow (1969).

4. *Kostrikin, A. I.:* Introduction to Algebra. Parts 1—3. Moscow (2000).

5. *Kurosh, A. G.:* Lectures on general algebra. Moscow (1962).

6. *Nikitina, Ya. V., Sultanov, A. Ya.:* Weil bundle over the tensor product of two algebras of dual numbers. Izvestia vuzov. Volga region. Phys.-Math. Nauki, **4**:28, 17—28 (2013).

7. *Sultanov, A. Ya.:* On automorphism groups of special linear algebras. Izvestia Penza State Ped. Univ., **8**:22, 70—74 (2010).

8. *Sultanova, G. A.:* On the dimensions of Lie algebras of automorphisms in tangent bundles with a complete lift connection over a projective Euclidean base. Dalnevost. Math. J., **16**:1, 83—95 (2016).

9. *Sultanova, G. A.:* On an estimate for the dimensions of Lie algebras of infinitesimal automorphisms of tangent bundles with a complete lift connection over a nonprojective Euclidean base. DGMF, 47, 146—153 (2016).

10. *Shirokov, A. P.:* A note on structures in tangent bundles. Tr. Geom. Sem., 5, 259—309 (1973).

For citation: Sultanov, A. Ya., Sultanova, G. A., Monakhova O. A. On the group of automorphisms of the algebra of plural numbers. DGMF, 54 (2), 63—70 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-6.