ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.В.Кретов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ КОМПЛЕКСОВ ГИПЕРКВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n продолжается [1] изучение геометрии порожденного комплексом (n-параметрическим семейством) $\mathcal{K}_n$ [2] дифференцируемого отображения $f: C \in A_n \mapsto q \in \mathcal{R}(q)$, где $\mathcal{R}(q)$ – пространство центральных невырожденных гиперквадрик q, C – центр гиперквадрики q. С помощью отображения f вводится понятие асимптотических направлений многообразия $\mathcal{K}_n$ гиперквадрик q. Рассматривается аналог соприкасающейся плоскости [3] кривой $\ell: R^1 \to P_n$. Доказывается теорема, являющаяся аналогом результата, полученного Рыжковым В.В. для отображения $P_m \to P_n$ при $m<n$, [3].

Образом отображения f является комплекс $\mathcal{K}_n$ центральных невырожденных гиперквадрик q, т.е. $f(U) = \mathcal{K}_n$, где $U \subset A_n$ – окрестность точки C. Изучение ведется в частично-канонизированном репере $R_0 = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n}$, который геометрически характеризуется тем, что его вершина A совмещена с центром гиперквадрики q. В репере R_0 уравнения гиперквадрики q и комплекса $\mathcal{K}_n$ соответственно запишутся в виде:

$$q \equiv a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma, \tag{2}$$

где символом ∇ обозначен оператор, определенный по правилу, указанному в работе [2]. Полученная при двукратном продолжении системы (2) система величин $\Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ образует фундаментальный объект второго порядка комплекса $\mathcal{K}_n$ (отображения f).

Обозначим символом $\hat{q}$ произвольную гиперквадрику пространства $\mathcal{R}(q)$. Ее уравнение в репере R_0 в общем случае запишется в виде

$$\hat{q} \equiv \hat{a}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta + 2\hat{a}_\alpha X^\alpha - 1 = 0. \tag{3}$$

Пусть $T_f(P_\alpha) = K_f(P_\alpha)(A_n)$ – образ пространства A_n при отображении $K_f(P_\alpha)$, [1]. $T_f(P_\alpha)$ является n-мерной связкой гиперквадрик [4], причем первые дифференциальные окрестности многообразий $T_f(P_\alpha)$ и $\mathcal{K}_n$ совпадают. Так как многообразие $T_f(P_\alpha)$ полностью определяется своей первой дифференциальной окрестностью, то $T_f(P_\alpha)$ не зависит от P_α. В дальнейшем $T_f(P_\alpha)$ будем обозначать просто символом T_f.

Введем систему величин: $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2a^{\rho\sigma}\Lambda_{\alpha\rho\sigma}\Lambda_{\beta\gamma\delta}$. В каждой точке C тензор $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяет конус

$$\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\gamma X^\delta = 0, \tag{4}$$

состоящий из прямых связки $\{C\}$. Заметим, что система (4) имеет нетривиальные решения только в специальных случаях.

Определение 1. Конус (4) называется асимптотическим конусом, а определяемые им направления называются асимптотическими направлениями в пространстве A_n.

Покажем, что определенные таким образом асимптотические направления являются обобщением асимптотических направлений точечных многообразий для комплекса гиперквадрик $\mathcal{K}_n$. При этом пространство A_n будем рассматривать как пространство параметров для многообразия $\mathcal{K}_n$.

Направления в $\mathcal{R}(q)$, соответствующие при отображении f асимптотическим направлениям в A_n, будем называть асимптотическими направлениями многообразия $\mathcal{R}(q)$.

Рассмотрим кривую $\mathcal{L}: R^1 \to \mathcal{R}(q)$

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta} t + \tfrac{1}{2} M_{\alpha\beta} t^2 + \langle 3 \rangle, \quad \hat{a}_\alpha = \Lambda_\alpha t + \tfrac{1}{2} M_\alpha t^2 + \langle 3 \rangle, \tag{5}$$

где символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов порядка малости $p \geqslant 3$ относительно приращений координат точки области определения.

О п р е д е л е н и е 2. Связку гиперквадрик $E_2(\mathcal{L},q)$, заданную уравнениями:

$$\hat{a}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\lambda\Lambda_{\alpha\beta}+\mu M_{\alpha\beta}, \quad \hat{a}_{\alpha}=\lambda\Lambda_{\alpha}+\mu M_{\alpha}, \tag{6}$$

будем называть соприкасающейся связкой гиперквадрик для кривой (5) в элементе $q=\mathcal{L}(0)$.

Связка (6) в общем случае имеет размерность 2, а в случае кривой, инфлексионной [5] в элементе q, она вырождается в пучок гиперквадрик. Соприкасающаяся связка $E_2(\mathcal{L},q)$ является аналогом соприкасающейся плоскости кривой $\ell: R^1\to P_n$ [3].

Т е о р е м а 1. Асимптотическое направление комплекса $\mathcal{K}_n$ в элементе q характеризуется тем, что существует кривая $\mathcal{L}: R^1\to R(q)$, $\operatorname{Im}\mathcal{L}\subset\mathcal{K}_n$ определяющая в элементе это направление, такая, что $E_2(\mathcal{L},q)\subset T_\ell$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X^α -координаты центра $\hat{C}$ гиперквадрики $\hat{q}$. Так как отображения $\mathcal{L}$ и ℓ имеют максимальный ранг в рассматриваемых точках, то существует кривая $L: R^1\to A_n$

$$X^\alpha=\Lambda^\alpha t+\tfrac{1}{2}M^\alpha t^2+\langle 3\rangle, \tag{7}$$

такая, что $\mathcal{L}=\ell\circ L$. Используя работу [1], находим систему уравнений для соприкасающейся связки $E_2(\mathcal{L},q)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\alpha\beta}&=a_{\alpha\beta}+\lambda\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma+\mu(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma+\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta),\\ \hat{a}_{\alpha}&=-\lambda a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta-\mu(a_{\alpha\beta}M^\beta+2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma).\end{aligned} \tag{8}$$

Параметрические уравнения связки T_ℓ

$$\hat{a}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma, \quad \hat{a}_{\alpha}=-a_{\alpha\beta}X^\beta \tag{9}$$

соответствуют отображению $K_\ell(0)$ [1]. Из (8) и (9) вытекает, что, для того, чтобы система величин Λ^α определяла асимптотическое направление в A_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие λ,μ и M^α, при которых выполняется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}&\lambda\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma+\mu(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma+\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta)=\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma,\\ &\lambda a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta+\mu(a_{\alpha\beta}M^\beta+2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma)=a_{\alpha\beta}X^\beta.\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $\eta^\alpha=\frac{\lambda}{\mu}\Lambda^\alpha+M^\alpha-\frac{1}{\mu}X^\alpha$, тогда уравнения (10) принимают вид

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma=0, \tag{11}$$

$$2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma+a_{\alpha\beta}\eta^\beta=0. \tag{12}$$

Из (12) получаем

$$\eta^\alpha=-2a^{\beta\alpha}\Lambda_{\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta \tag{13}$$

Таким образом, для любых Λ^α существуют единственные η^α, при которых удовлетворяется подсистема уравнений (12). Используя формулы (13) и (11), получаем следующую систему уравнений для асимптотических направлений в A_n

$$(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}-2a^{\varepsilon\zeta}\Lambda_{\alpha\beta\zeta}\Lambda_{\varepsilon\gamma\delta})\Lambda^\gamma\Lambda^\delta=0, \tag{14}$$

откуда вытекает справедливость утверждения теоремы.

Т е о р е м а 2. Каждое ℓ -характеристическое в точке C направление является асимптотическим направлением в A_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координатные представления отображений L и ℓ соответственно имеют вид:

$$X^\alpha=\Lambda^\alpha t+\tfrac{1}{2}M^\alpha t^2+\langle 3\rangle, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\alpha\beta}&=a_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma+\tfrac{1}{2}\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}X^\gamma X^\delta+\langle 3\rangle,\\ \hat{a}_{\alpha}&=-a_{\alpha\beta}X^\beta-\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\beta X^\gamma+\langle 3\rangle.\end{aligned} \tag{16}$$

Для кривых L (15), определяющих ℓ -характеристическое направление, [1], из уравнений индикатрисы $\mathcal{J}_\ell$ [1], получаем:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta=2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma\mu, \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma=a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta\mu. \tag{17}$$

Для того, чтобы система величин Λ^α определяла асимптотическое направление в A_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие η^α, при которых выполняется система уравнений:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma=0, \quad 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma+a_{\alpha\beta}\eta^\beta=0, \tag{18}$$

значит каждое ℓ -характеристическое в точке C направление является асимптотическим направлением в A_n.

Утверждение, сформулированное в последней теореме, является аналогом результата, полученного для точечного отображения $P_m \to P_n$ при $m < n$ В.В.Рыжковым, [3].

Список литературы

1.Кретов М.В. Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т. Калининград, 1981 (рукопись депонирована в ВИНИТИ 22 июня 1981г., №3003-81 Деп.).

2.Кретов М.В. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве,- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12, Калининград, 1981, с.35-39.

3.Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n -Тр.геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, с.235-242.

4.Схоутен И.А. и Стройк Д.Дж.Введение в новые методы дифференциальной геометрии.М., 1948.

5.Андреев Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q) -В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, с.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Т.Н.Крысова

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПАРАБОЛОИДОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве A_3 рассматривается конгруэнция (C) эллипсов C. Под конгруэнцией (C) понимается такая конгруэнция эллипсов, у которой центры образующих элементов описывают поверхность (A), не вырождающуюся в линию или плоскость и не являющуюся торсом, а также касательная плоскость к поверхности (A) в текущей точке совпадает с плоскостью соответствующего эллипса. Введены ассоциированные с (C) параболоиды H, квадрики Q_1 и Q_2. Рассмотрены свойства конгруэнций (C), а также свойства некоторых подклассов этих конгруэнций со специальными свойствами ассоциированных параболоидов.

1.Отнесем конгруэнцию (C) к каноническому реперу $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где A -центр эллипса, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направлены по асимптотическим касательным поверхности (A), вектор $\vec{e}_3$ направлен по аффинной нормали к этой поверхности. Концы векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ -точки A_1 и A_2 соответственно принадлежат эллипсу.

С каждым эллипсом ассоциируется единственный параболоид H, определяемый следующим образом: I/эллипс принадлежит параболоиду H, и его плоскость сопряжена с диаметром параболоида; 2/прямая, проходящая через центр эллипса, с направляющим вектором $\vec{e}_3$ является диаметром параболоида; 3/точка A_3 -конец вектора $\vec{e}_3$ -принадлежит параболоиду. В репере R уравнения эллипса C и параболоида H запишутся соответственно