УДК 514.76

К. В. Башашина[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

baschaschina@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7209-884X

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-5

Тензорность объекта кривизны связности в главном расслоении пространства проективной связности Картана

Рассмотрено пространство проективной связности Картана со структурными уравнениями, обобщающими структурные уравнения проективного пространства. Данное пространство не является пространством со связностью главного расслоения. Задание связности в присоединенном главном расслоении привело к пространству со связностью. Доказано, что объект кривизны введенной связности является тензором.

Ключевые слова: пространство проективной связности Картана, тензор кривизны-кручения, тензор кривизны, связность в присоединенном главном расслоении.

Рассмотрим пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ со структурными уравнениями [1]

$$
\begin{aligned}
&d\omega_0^i = \omega_0^j \wedge \omega_j^i + \omega_0^0 \wedge \omega_0^i + R_{0jk}^i \omega_0^j \wedge \omega_0^k,\\
&d\omega_j^i = \omega_j^0 \wedge \omega_0^i + \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega_0^k \wedge \omega_0^l,\\
&d\omega_i^0 = \omega_i^j \wedge \omega_j^0 + \omega_i^0 \wedge \omega_0^0 + R_{ijk}^0 \omega_0^j \wedge \omega_0^k,\\
&d\omega_0^0 = \omega_0^i \wedge \omega_i^0 + R_{0jk}^0 \omega_0^j \wedge \omega_0^k
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Поступила в редакцию 28.05.2019 г.

и условием локальной проективности

$$\omega_0^0 + \omega_i^i = \lambda_i \omega_0^i. \qquad (2)$$

Причем компоненты объекта кривизны-кручения $R = \{R_{ojk}^i, R_{jkl}^i, R_{ijk}^0, R_{0ij}^0\}$ антисимметричны по двум последним нижним индексам и удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω_0^i

$$\begin{aligned} &\Delta R_{0\,jk}^i + R_{0\,jk}^i \omega_0^0 \equiv 0, \\ &\Delta R_{jkl}^i + 2R_{jkl}^i \omega_0^0 - R_{0kl}^i \omega_j^0 \equiv 0, \\ &\Delta R_{ijk}^0 + 3R_{ijk}^0 \omega_0^0 + R_{ijk}^l \omega_l^0 - R_{0kl}^0 \omega_i^0 \equiv 0, \\ &\Delta R_{0ij}^0 + 2R_{0ij}^0 \omega_0^0 + R_{0ij}^k \omega_k^0 \equiv 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Согласно работе [2], тензор кривизны-кручения R имеет три подтензора:

1) $R_{0\,jk}^i$ — тензор кручения,

2) $\{R_{jkl}^i, R_{0\,jk}^i\}$ — тензор аффинной кривизны-кручения,

3) $\{R_{0ij}^0, R_{0\,jk}^i\}$ — расширенный тензор кручения.

Пространство $P_{n,n}$ со структурными уравнениями (1) и условием (2) есть главное расслоение $G_{n(n+1)}(M_n)$ над базой M_n — гладким многообразием, типовым слоем служит группа стационарности точки $G_{n(n+1)}$, действующая эффективно в каждом центропроективном пространстве $P_n^0(x)$, приклеенном к базе M_n в точке $x \in M_n$. При этом $P_{n,n}$ не является пространством со связностью главного расслоения.

Зададим связность в расслоении $G_{n(n+1)}(M_n)$ с помощью новых форм:

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega_0^k,\ \tilde{\omega}_i^0 = \omega_i^0 - \Gamma_{ij}^0 \omega_0^j,\ \tilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \Gamma_{0i}^0 \omega_0^i, \qquad (4)$$

где функции Γ^i_{jk}, Γ^0_{ij}, Γ^0_{0i} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jk}\omega^0_0 - \delta^i_k\omega^0_j = \Gamma^i_{jkl}\omega^l_0,\\
&\Delta\Gamma^0_{ij} + 2\Gamma^0_{ij}\omega^0_0 - \Gamma^0_{0j}\omega^0_i + \Gamma^k_{ij}\omega^0_k = \Gamma^0_{ijk}\omega^k_0,\\
&\Delta\Gamma^0_{0i} + \Gamma^0_{0i}\omega^0_0 + \omega^0_i = \Gamma^0_{0ij}\omega^j_0.
\end{aligned}\tag{5}$$

Внешние дифференциалы форм связности (4) имеют вид

$$\begin{aligned}
&d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + K^i_{jkl}\omega^k_0 \wedge \omega^l_0,\\
&d\tilde{\omega}^0_i = \tilde{\omega}^0_i \wedge \tilde{\omega}^0_0 + \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}^0_j + K^0_{ijk}\omega^j_0 \wedge \omega^k_0,\\
&d\tilde{\omega}^0_0 = K^0_{0ij}\omega^i_0 \wedge \omega^j_0,
\end{aligned}\tag{6}$$

где компоненты объекта кривизны $\{K^i_{jkl},\ K^0_{ijk}, K^0_{0ij}\}$ выражаются по формулам

$$\begin{gathered}
K^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + R^i_{jkl} - \Gamma^i_{jm}R^m_{0kl},\\
K^0_{ijk} = \Gamma^0_{[jk]} - \Gamma^0_{i[j}\Gamma^0_{0k]} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma^0_{lk]} + R^0_{ijk} - \Gamma^0_{il}R^l_{0jk},\\
K^0_{0ij} = \Gamma^0_{0[ij]} + R^0_{0ij} - \Gamma^0_{0k}R^k_{0ij},
\end{gathered}\tag{7}$$

причем по крайним индексам в квадратных скобках производится альтернирование.

Продолжим дифференциальные уравнения (5) и запишем их в виде сравнений:

$$\begin{gathered}
\Delta\Gamma^i_{jkl} + 2\Gamma^i_{jkl}\omega^0_0 + \Gamma^i_{jl}\omega^0_k + \Gamma^i_{kl}\omega^0_j + \Gamma^i_{jk}\omega^0_l - \delta^i_l\Gamma^m_{jk}\omega^0_m \equiv 0,\\
\Delta\Gamma^0_{ijk} + 3\Gamma^0_{ijk}\omega^0_0 + \Gamma^0_{ik}\omega^0_j + \Gamma^0_{kj}\omega^0_i +\\
+ 2\Gamma^0_{ij}\omega^0_k + \Gamma^l_{ijk}\omega^0_l - \Gamma^0_{0jk}\omega^0_i \equiv 0,\\
\Delta\Gamma^0_{0ij} + 2\Gamma^0_{0ij}\omega^0_0 + \Gamma^0_{0j}\omega^0_i + \Gamma^0_{0i}\omega^0_j \equiv 0.
\end{gathered}\tag{8}$$

Теперь найдем сравнения на компоненты (7) с помощью соотношений (3, 5, 8):

$$\Delta K^i_{jkl} + 2K^i_{jkl}\omega^0_0 \equiv 0,$$
$$\Delta K^0_{ijk} + 3K^0_{ijk}\omega^0_0 - K^0_{0jk}\omega^0_i + K^l_{ijk}\omega^0_l \equiv 0,$$
$$\Delta K^0_{0ij} + 2K^0_{0ij}\omega^0_0 \equiv 0.$$

Теорема. *Объект кривизны* $\{K^i_{jkl},\ K^0_{ijk}, K^0_{0ij}\}$ *связности* $\{\Gamma^i_{jk},\ \Gamma^0_{ij},\ \Gamma^0_{0i}\}$ *(5) в присоединенном расслоении пространства проективной связности Картана* $G_{n(n+1)}(M_n)$ *является тензором.*

Список литературы

1. *Башашина К.В.* Пространство проективной связности Картана как главное расслоение без связности // Матер. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева. М., 2019. С. 57—58.

2. *Шевченко Ю.И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 154—160.

K. Bashashina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
baschaschina@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7209-884X
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-5

Curvature tensor of connection in principal bundle of Cartan's projective connection space

Submitted on May 28, 2019

We considered Cartan's projective connection space with structure equations generalizing the structure equations of the projective space and the condition of local projectivity (this condition is an analogue to the equiprojectivity condition in the projective space). The curvature-torsion object of the space is a tensor containing three subtensor: torsion tensor, torsion affine curvature tensor, extended torsion tensor. Cartan's projective connection space is not a space with connection of the principal bundle. The assignment of a connection in the adjoint principal bundle leads to a space with a connection. It is proved that the curvature object of the introduced connection is a tensor.

Keywords: space of Cartan's projective connection, curvature-torsion tensor, curvature tensor, connection in an adjoint principal bundle.

References

1. *Bashashina, K.:* The space of Cartan's projective connection as the main bundle without connection. International Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of V. T. Bazylev. Moskow. 57—58 (2019) (in Russian).

2. *Shevchenko, Yu. I.:* Centro-projective connection in Cartan's projective connection space. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 36, 154—160 (2005) (in Russian).