УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ N_0

С.В. Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

Исследован подкласс N_0 конгруэнций N [1], в котором наряду с фокальными поверхностями (A_0) и (A_3), описанными соответственно фокальными точками второго и первого порядков, имеются ещё две фокальные поверхности (M_1) и (M_2), где M_1, M_2- точки пересечения с квадрикой $Q\in N_0$ прямой, пересекающей прямые A_0A_3 и A_1A_2
(A_0A_i, A_3A_i - прямолинейные образующие квадрики Q, i=1,2). Доказано, что фокальная поверхность (A_3) конгруэнции N_0 является двухкратной.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию K линейчатых невырожденных квадрик. В репере $\{\overline{A}_0, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3\}$, где A_0 и A_3 - фокальные точки квадрики $Q\in K$, а A_i (i, j,k=1,2) - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики, проходящих через A_0 и A_3, уравнение квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции K запишутся соответственно в виде:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases}\omega_0^3 = 0\,,\ \omega_3^0 = 0\,,\ \omega_i^j = a_{ik}^j\omega^k\,,\ \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k\,, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\omega^k\,,\ \omega_3^i = b_k^i\omega^k\,,\ \Omega = h_k\omega^k\,,\end{cases} \tag{1.2}$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $\Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3$, i≠j и по индексам i и j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Замыкая первые два уравнения системы (1.1), получим соотношения:

$$c_{12} = c_{21}\,,\ b_1^1\lambda_{12} - b_2^2\lambda_{21} + b_1^2\lambda_{22} - b_2^1\lambda_{11} = 0\,. \tag{1.3}$$

Конгруэнции N выделяются из конгруэнций K соотношениями [1]:

$$c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0\,,\ a_{ij}^j = -\tfrac{1}{2}h_i\,. \tag{1.4}$$

2. **Определение**. Конгруэнцией N_0 называется конгруэнция N, у которой на прямых A_0A_3, A_1A_2 имеются точки L_1, L_2 такие, что прямая L_1L_2 пересекает квадрику $Q\in N$ в её фокальных точках M_1, M_2.

Пронормируем вершины репера так, чтобы точки L_1 и L_2 были единичными точками соответствующих ребер:

$$\overline{L}_1=\overline{A}_0+\overline{A}_3\ ,\ \overline{L}_2=\overline{A}_1+\overline{A}_2. \qquad (2.1)$$

Прямая L_1L_2 пересекает квадрику (1.1) в точках:

$$\overline{M}_1=\overline{A}_0+\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3\ ,\ \overline{M}_2=\overline{A}_1+\overline{A}_2-\overline{A}_0-\overline{A}_3. \qquad (2.2)$$

Фокальные точки квадрики $Q\in K$ определяются системой уравнений [2, с. 44]:

$$x^1x^2-x^0x^3=0\ ,\ h_ix^1x^2-a^j_{ii}(x^i)^2-a^i_{ij}(x^j)^2+\lambda_{ki}x^kx^3+c_{ik}x^0x^k=0\ . \qquad (2.3)$$

Учитывая, что для конгруэнции N_0 выполняются соотношения (1.4) и что точки M_1 и M_2 удовлетворяют ей, получим :

$$a^j_{ii}=h_i+\tfrac{1}{2}h_j\ ,\ \lambda_{ii}+\lambda_{ji}=0\ . \qquad (2.4)$$

Обозначим:

$$\lambda_{ii}=\lambda_i\ . \qquad (2.5)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции N_0 запишется в виде:

$$\begin{cases}\omega^3_0=0\ ,\ \omega^0_3=0\ ,\ \omega^3_i-\omega^j=0\ ,\ \omega^j_i=(h_i+\frac{1}{2}h_j)\omega^i-\frac{1}{2}h_i\omega^j\ ,\\ \omega^0_i-\omega^2_3=\lambda_1\omega^1-\lambda_2\omega^2\ ,\ \omega^i_3=b^i_k\omega^k\ ,\ \Omega=h_k\omega^k\ ,\\ \omega^0_0=m_k\omega^k\ ,\ \omega^1_1=n_k\omega^k\ ,\ \omega^0_1+\omega^0_2-\omega^1_3-\omega^2_3=0\ ,\end{cases} \qquad (2.6)$$

причём

$$\lambda_1(b^2_2-b^1_2)-\lambda_2(b^1_1-b^2_1)=0. \qquad (2.7)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что конгруэнции N_0 существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

3. **Теорема 1**. Фокальная поверхность (A_3) конгруэнции N_0 является двухкратной.

Доказательство. Условия двухкратности фокальной поверхности (A_3) конгруэнции K имеют вид:

$$\begin{cases}(\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\lambda_{12}a^2_{11}-\lambda_{11}a^2_{12})=0\ ,\\ (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\lambda_{21}a^1_{22}-\lambda_{22}a^1_{21})=0\ .\end{cases} \qquad (3.1)$$

Из (2.4) , (2.5) следует :

$$\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}=\lambda_1\lambda_2-(-\lambda_2)(-\lambda_1)\ , \qquad (3.2)$$

т. е. условия (3.1) выполнены.

Обозначим через

$$\overline{E}_i=\overline{A}_0+\overline{A}_i\ \ ,\ \overline{H}_i=\overline{A}_3+\overline{A}_i \qquad (3.3)$$

единичные точки соответственно ребер A_0A_i, A_3A_i, а через

$$\overline{E}^*_i=\overline{A}_0-\overline{A}_i\ ,\ \overline{H}^*_i=\overline{A}_3-\overline{A}_i \qquad (3.4)$$

четвертые гармонические к ним относительно A_0, A_i и A_3, A_i.

Теорема 2. Прямые E_iH_j и $E_i^*H_j^*$ являются прямолинейными образующими квадрики $Q \in N_0$, проходящими соответственно через фокальные точки M_1 и M_2.

Доказательство. Уравнения касательных плоскостей к квадрике (1.1) соответственно в точках M_1 и M_2 имеют вид :

$$x^1 + x^2 - x^0 - x^3 = 0 \tag{3.5}$$

$$x^1 + x^2 + x^0 + x^3 = 0 \tag{3.6}$$

Они пересекаются с квадрикой (1.1) по ее прямолинейным образующим

$$\begin{cases} x^1 - x^0 = 0, \\ x^2 - x^3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 - x^3 = 0, \\ x^2 - x^0 = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} x^1 + x^0 = 0, \\ x^2 + x^3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 + x^3 = 0, \\ x^2 + x^0 = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

которые являются соответственно прямыми E_1H_2, E_2H_1 и $E_1^*H_2^*$, $E_2^*H_1^*$. Из (3.7), (3.8) следует, что

$$M_1 = E_1H_2 \cap E_2H_1\ ,\ M_2 = E_1^*H_2^* \cap E_2^*H_1^*\ . \tag{3.9}$$

Теорема 3. Фокальные точки M_1, M_2 квадрики $Q \in N_0$ гармонически делят точки L_1 и L_2 пересечения прямой M_1M_2 с ребрами A_0A_3 и A_1A_2 репера.

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) следует :

$$\overline{M}_1 = \overline{L}_1 + \overline{L}_2,\ \overline{M}_2 = \overline{L}_2 - \overline{L}_1. \tag{3.10}$$

Имеем:

$$(M_1M_2; L_1L_2) = -1. \tag{3.11}$$

Библиографический список

1. Шмелева С. В. Об одном классе конгруэнций квадрик в P_3 с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообрарий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 127-132.

2. Малаховская С. В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью // Там же, 1981. Вып. 12. С. 44-47.

S.V. S h m e l e v a

CONGRUENCES N_0

Subclass N_0 of congruences of nondegerate conics is investigated in which along with focal surfaces (A_0) and (A_3), described by focal points respectively of the second and of the first order, exist two more focal surfaces (M1), (M2), where M1,

M2 - are points of intersection with the quadric Q N0 of the line, intersecting the

lines A0 A1 and A1 A2 (A0 Ai , A3 Ai (i = 1 , 2) - are rectilinear generatrices of the

quadric Q). It is proved that the focal surface (A3) of the congruence N0 is double and

that the focal points M1 , M2 harmonically divide the points of intersection of the line

with the edges A0 A3 and A1 A2 .