7. *Шевченко Ю. И.* Связность в продолжении главного расслоения // Там же. Вып. 22. С. 117—127.

8. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

A. Kuleshov

Connections of the 2nd order on a family of centered planes in a projective space

In the prolongation $G^2(B_r)$ of the principal bundle $G(B_r)$, associated with a family of centered planes B_r, by Laptev — Lumiste's way foundamental-group connection of the 2nd order is given. Equations of the object Γ^2 of this connection and the curvature object R^2 of this connection are found. It is shown that connection of the 1st order Γ on the bundle $G(B_r)$ together with affine connection Γ^i_{jk} in the parameter space V_r induce one-parameter bunch of the connections Γ^2.

УДК 514.76

Л. А. Лукичева

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары)

Двойственные нормальные связности на распределении гиперплоскостных элементов в римановом пространстве

Построены основы двойственной теории нормальных связностей, индуцируемых на оснащенном регулярном распределении гиперплоскостных элементов в римановом пространстве V_n.

Ключевые слова: расширенное риманово пространство, нормализация, тензор, структурные уравнения, нормальная связность, двойственность.

Результаты работы получены с использованием инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований: метода внешних форм Э. Картана [10], метода нормализации А. П. Нордена [6], метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [2].

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n}\,;\ I, K, L, S, T, P, Q, J = \overline{1,n}\,;$$
$$i, j, k, s, l = \overline{1,n-1}\,;\ \bar{\alpha} = \overline{0,8}\,;\ \alpha = \overline{1,8}\,.$$

1. Рассмотрим риманово пространство V_n, структурные уравнения которого имеют вид

$$D\theta^I = \theta^L \wedge \theta_L^I,\ D\theta_K^I = \theta_K^L \wedge \theta_L^I + \frac{1}{2} r_{KPQ}^I \theta^P \wedge \theta^Q\,; \tag{1}$$

$$\nabla g_{IK} \equiv dg_{IK} - g_{IL}\theta_K^L - g_{LK}\theta_I^L = 0,\ g_{IL} g^{LK} = \delta_I^K, \tag{2}$$

где g_{IK} — невырожденный симметричный тензор риманова пространства V_n.

Согласно работе [8], система форм Пфаффа $\{\omega_{\bar{K}}^{\bar{I}}\}$

$$\omega_0^I = \theta^I,\ \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_L^L,\ \omega_K^0 = 0,\ \omega_K^I = \theta_K^I - \frac{1}{n+1}\delta_K^I \theta_L^L \tag{3}$$

определяет пространство проективной связности $P_{n,n}$. Формы этой системы в силу (1) удовлетворяют уравнениям Картана — Лаптева [1; 2]:

$$D\omega_0^I = \omega_0^L \wedge \left(\omega_L^I - \delta_L^I \omega_0^0\right),\ D\omega_0^0 = 0,\ D\omega_K^0 = 0,$$

$$D\omega_K^I = \omega_K^L \wedge \omega_L^I + \frac{1}{2} R_{KPQ}^I \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \tag{4}$$

$$\omega_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0,\ R_{0PQ}^I = R_{KPQ}^0 = R_{0PQ}^0 = 0,\ R_{KPQ}^I = r_{KPQ}^I.$$

Пространство проективной связности $P_{n,n}$ без кручения, определяемое системой (3), со структурными уравнениями (4) назовем *расширенным римановым пространством* [5] и обозначим V_n^*.

В расширенном римановом пространстве V_n^* рассмотрим распределение гиперплоскостных элементов M, дифференциальные уравнения которого в репере нулевого порядка имеют вид [3; 7]:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K , \tag{5}$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^n \omega_0^L , \tag{6}$$

$$\nabla \Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n \omega_0^0 - \Lambda_{ij}^n \omega_n^j = \Lambda_{inL}^n \omega_0^L . \tag{7}$$

Предположим, что распределение $\mathrm{M} \subset V_n$ регулярное (то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left| \Lambda_{ij}^n \right| \neq 0$):

$$\Lambda_n^{ik} \Lambda_{kj}^n = \delta_j^i , \; \Lambda_n^{ki} \Lambda_{jk}^n = \delta_j^i , \; \nabla \Lambda_n^{is} - \Lambda_n^{is} \omega_0^0 = -\Lambda_n^{ik} \Lambda_n^{js} \Lambda_{kjL}^n \omega_0^L . \tag{8}$$

Функция Λ есть относительный инвариант первого порядка и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$d \ln \Lambda = \Lambda_L \omega_0^L - (n+1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) , \; \Lambda_L = \Lambda_n^{ji} \Lambda_{ijL}^n . \tag{9}$$

2. Следуя работе [9], рассмотрим систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}$:

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{1}{n+1} \Lambda_K \omega_0^K , \; \overline{\omega}_0^k = \omega_0^k + \Lambda_{jn}^n \Lambda_n^{kj} \omega_0^n , \; \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n ,$$

$$\overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ji}^n \omega_n^j , \; \overline{\omega}_i^k = \omega_i^k + (\Lambda_n^{kj} \Lambda_{jiL}^n - \delta_i^k \frac{\Lambda_L}{n+1}) \omega_0^L , \tag{10}$$

$$\overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ji}^n \omega_0^j , \; \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0 (\equiv 0) = 0 , \; \overline{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ij} \omega_j^0 (\equiv 0) = 0 ,$$

$$\overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{1}{n+1} \Lambda_K \omega_0^K .$$

Преобразование I форм проективной связности по закону (10) является инволютивным, то есть $I \equiv I^{-1}$. Действительно, согласно системе (10) имеем

$$\overline{\omega}_i^n = \overline{\Lambda}_{iK}^n \overline{\omega}_0^K, \tag{11}$$

где

$$\overline{\Lambda}_{ij}^n = -\Lambda_{ji}^n, \ \overline{\Lambda}_{in}^n = \Lambda_{ji}^n \Lambda_{kn}^n \Lambda_n^{jk}. \tag{12}$$

Функции $\overline{\Lambda}_L \overset{def}{=} \overline{\Lambda}_n^{ij} \overline{\Lambda}_{jiL}^n$ (см. (9)) имеют строение

$$\overline{\Lambda}_i = -\Lambda_i, \quad \overline{\Lambda}_n = -\Lambda_n + \Lambda_l \Lambda_n^{lk} \Lambda_{kn}^n. \tag{13}$$

Справедлива

Теорема 1. *Регулярное распределение гиперплоскостных элементов* M *в расширенном римановом пространстве* V_n^* *индуцирует в первой дифференциальной окрестности многообразие* $\overline{\mathrm{M}}$ *в* $\overline{P}_{n,n}$*, двойственное исходному, дифференциальные уравнения которого имеют вид (11).*

3. Предположим, что распределение (необязательно голономное) гиперплоскостных элементов M в римановом пространстве V_n оснащено в смысле Э. Картана [14], то есть на $\mathrm{M} \subset V_n$ задано поле геометрического объекта $\{\nu_n^i, \nu_n^0\}$ [3]:

$$\begin{gathered} d\nu_n^i + \nu_n^l \omega_l^i - \nu_n^i \omega_n^n + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K, \\ d\nu_n^0 + \nu_n^0 \omega_0^0 - \nu_n^0 \omega_n^n + \nu_n^s \omega_s^0 (\equiv 0) + \omega_n^0 (\equiv 0) = \nu_{nK}^0 \omega_0^K. \end{gathered} \tag{14}$$

Согласно [4] на оснащенном в смысле Нордена — Картана распределении гиперплоскостных элементов $\mathrm{M} \subset V_n$ каждая из систем форм $\{\overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^0, \overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^n\}$ [11]:

$$\begin{gathered} \overset{0}{\theta}{}_n^0 = \omega_n^0 (\equiv 0) + \nu_n^i \omega_i^0 (\equiv 0) - \nu_i^0 (\nu_{nK}^i \omega_0^K - \nu_n^i \nu_n^j \omega_j^n) + (\nu_n^0)^2 \omega_0^n, \\ \overset{0}{\theta}{}_n^n = \omega_n^n + \nu_n^i \omega_i^n - \omega_0^0 + \nu_i^0 (\omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n) + 2\nu_n^0 \omega_0^n; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\overset{\alpha}{\theta}{}_n^0 = \overset{0}{\theta}{}_n^0 + \overset{\alpha}{B}{}_{ni}^n (\omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n), \ \overset{\alpha}{\theta}{}_n^n = \overset{0}{\theta}{}_n^n + \overset{\alpha}{B}{}_{ni}^n (\omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n), \tag{16}$$

определяет нормальную связность [12] $\overset{\bar{\alpha}}{\nabla}{}^\perp$ в расслоении нормалей первого рода. Заметим, что на неголономном регулярном распределении гиперплоскостных элементов, оснащенном в смысле Нордена — Картана, индуцируются восемь нормальных связностей $\overset{0-7}{\nabla}{}^{\perp}$; на голономном оснащенном в смысле Нордена — Картана распределении гиперплоскостных элементов индуцируются восемь нормальных связностей $\overset{0-6,8}{\nabla}{}^{\perp}$.

Пусть распределение (необязательно голономное) гиперплоскостных элементов M в римановом пространстве V_n оснащено в смысле Э. Бортолотти [13], то есть на $\mathrm{M} \subset V_n$ задано поле геометрического объекта $\{\nu_i^0,\ \mu_n^0\}$ [3]:

$$\begin{aligned} &d\nu_j^0 - \nu_k^0\omega_j^k + \nu_j^0\omega_0^0 + \omega_j^0(\equiv 0) = \nu_{jL}^0\omega_0^L,\ \nu_i^0 \neq 0, \\ &d\mu_n^0 - \mu_n^0\omega_n^n + \mu_n^0\omega_0^0 - \nu_j^0\omega_n^j + \omega_n^0(\equiv 0) = \mu_{nL}^0\omega_0^L. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу наличия многообразия $\overline{\mathrm{M}} \subset \overline{P}_{n,n}$, двойственного исходному распределению $\mathrm{M} \subset V_n$, системе форм (15), (16) соответствует двойственная ей система форм $\{\overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^0, \overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^n\}$:

$$\begin{aligned} &\overset{0}{\overline{\theta}}{}_n^0 = \overline{\omega}_n^0 + \overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_i^0 - \overline{\nu}_i^0(\overline{\nu}_{nk}^i\overline{\omega}_0^k - \overline{\nu}_n^i\overline{\nu}_n^j\overline{\omega}_j^n) + (\overline{\nu}_n^0)^2\,\overline{\omega}_0^n, \\ &\overset{0}{\overline{\theta}}{}_n^n = \overline{\omega}_n^n + \overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_i^n - \overline{\omega}_0^0 + \overline{\nu}_i^0(\overline{\omega}_0^i - \overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_0^n) + 2\overline{\nu}_n^0\overline{\omega}_0^n; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\overset{\alpha}{\overline{\theta}}{}_n^0 = \overset{0}{\overline{\theta}}{}_n^0 + \overset{\alpha}{\overline{B}}{}_{ni}^n(\overline{\omega}_0^i - \overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_0^n),\ \overset{\alpha}{\overline{\theta}}{}_n^n = \overset{0}{\overline{\theta}}{}_n^n + \overset{\alpha}{\overline{B}}{}_{ni}^n(\overline{\omega}_0^i - \overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_0^n). \tag{19}$$

Эта система определяет нормальную связность $\overline{\overset{\bar{\alpha}}{\nabla}}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей второго рода, являющуюся двойственной [9] по отношению к связности $\overset{\bar{\alpha}}{\nabla}{}^{\perp}$ относительно инволютивного преобразования форм связности (10).

Каждая из систем форм $\{\overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^0, \overset{\bar{\alpha}}{\theta}{}_n^n\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1; 2]:

$$D\overset{\overline{\alpha}}{\theta}{}_n^0 = \overset{\overline{\alpha}}{\theta}{}_n^0 \wedge \overset{\overline{\alpha}}{\theta}{}_n^n + \frac{1}{2}\overset{\overline{\alpha}}{\mathfrak{R}}{}_{nST}^0\, \overline{\omega}_0^S \wedge \overline{\omega}_0^T,$$
$$D\overset{\overline{\alpha}}{\theta}{}_n^n = \frac{1}{2}\overset{\overline{\alpha}}{\mathfrak{R}}{}_{nST}^n\, \overline{\omega}_0^S \wedge \overline{\omega}_0^T. \qquad (20)$$

При $\Lambda_{[ij]}^n = 0$ функции $\overset{\alpha}{\overline{B}}{}_{ni}^n$ на голономном распределении гиперплоскостных элементов $\mathrm{M} \subset V_n$ примут вид

$$\overset{1}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{1}{B}{}_{ni}^n,\ \overset{2}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{2}{B}{}_{ni}^n - \overset{3}{B}{}_{ni}^n,\ \overset{3}{\overline{B}}{}_{ni}^n = -\overset{3}{B}{}_{ni}^n,$$
$$\overset{4}{\overline{B}}{}_{ni}^n = -\overset{3}{B}{}_{ni}^n,\ \overset{5}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{5}{B}{}_{ni}^n - 6\,\overset{3}{B}{}_{ni}^n, \qquad (21)$$
$$\overset{6}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{6}{B}{}_{ni}^n,\ \overset{7}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{7}{B}{}_{ni}^n = 0,\ \overset{8}{\overline{B}}{}_{ni}^n = \overset{8}{B}{}_{ni}^n.$$

Доказана

Теорема 2. *На оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти регулярном распределении гиперплоскостных элементов* $\mathrm{M} \subset V_n$ *в расслоении нормалей второго рода индуцируются девять нормальных связностей* $\overset{\overline{\alpha}}{\nabla}{}^{\perp}$*, определяемых системами форм (18), (19), причем связность* $\overset{8}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *определена на голономном распределении* $\mathrm{M} \subset V_n$.

В силу соотношений (21_3), (21_4), (21_7) справедлива

Теорема 3. *На оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти голономном распределении гиперплоскостных элементов* $\mathrm{M} \subset V_n$ *нормальные связности* $\overset{3}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{4}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$*,* $\overset{0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{7}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *совпадают.*

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники / ВИНИТИ АН СССР. 1979. Т. 9.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Труды геом. семинара / Ин-т науч. информ. АН СССР. 1971. Т. 3. С. 49—94.

4. *Лукичева Л. А.* Нормальные связности на распределении гиперплоскостных элементов в римановом пространстве // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2011. №4(72), ч. 1. С. 43—50.

5. *Лукичева Л. А.* Расширенное нормализованное риманово пространство // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2011. №2(70), ч. 1. С. 96—103.

6. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

7. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Труды геом. семинара / Ин-т науч. информ. АН СССР. 1973. Т. 4. С. 71—120.

8. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. 2005. №4. С. 21—27.

9. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

10. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

11. *Фисунова С. В.* Нормальные связности на распределении гиперплоскостных элементов // Сб. науч. тр. студентов и аспирантов. Чебоксары, 1997. Вып. 2. С. 49—55.

12. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

13. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differanziale delle congruanze di rette // Rend. Semin Fac. Univ. Cagliari. 1933. №3. С. 81—89.

14. *Cartan E.* Les éspaces a connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1937. №4. С. 147—159.

L. Lukicheva

Dual normal connections on the distribution of hyperplane elements in Riemannian space

Foundations of the dual theory of normal connections induced on equipped regular distribution of hyperplane elements in Riemannian space V_n are constructed.