ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.С.М а л а х о в с к и й

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ КОНИК.

Даны безынтегральные представления конгруэнции квадрик, на каждой квадрике которой имеется фокальная коника, и конгруэнции C_0 коник с неопределенными фокальными поверхностями. Показано, что характеристическими признаками таких конгруэнций являются соответственно касание вдоль фокальной коники всех квадрик конгруэнции одной квадрики и принадлежность одной квадрике всех коник конгруэнции.

§I. Конгруэнции коник с неопределенными фокальными поверхностями.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию (C) коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка A_3 плоскости коники $C\in(C)$ не принадлежит конике.

В репере $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_i $(i,j,k=1,2)$–точки пересечения с коникой C поляры точки A_3 относительно C, уравнения коники C запишутся в виде

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0. \tag{1.1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_{\mathcal J}=\omega^{\mathcal K}_{\mathcal J}A_{\mathcal K} \quad (\mathcal I, \mathcal J, \mathcal K=1,2,3,4), \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа $\omega^{\mathcal K}_{\mathcal J}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal K}_{\mathcal J}=\omega^{\mathcal I}_{\mathcal J}\wedge\omega^{\mathcal K}_{\mathcal I} \tag{1.3}$$

и условию эквипроективности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3+\omega^4_4=0. \tag{1.4}$$

Положим

$$\omega_i \overset{def}{=} \omega^4_i. \tag{1.5}$$

Так как плоскости коник C образуют двупараметрическое семейство, то формы Пфаффа ω_1, ω_2 линейно независимы, т.е.

$$\omega_1\wedge\omega_2\neq 0.$$

Фокальные точки коники C и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются уравнениями:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \tag{1.6}$$

$$x^1x^2(\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3)+(x^1)^2\omega^2_1+(x^2)^2\omega^1_2+$$
$$+x^1x^3(\omega^2_3-\omega^3_1)+x^2x^3(\omega^1_3-\omega^3_2)=0,$$
$$x^1\omega_1+x^2\omega_2=0.$$

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией C_0 называется конгруэнция (C) с неопределенными фокальными поверхностями, т.е. такая конгруэнция коник, у которой любые две смежные коники имеют общую точку [I].

Т е о р е м а I.I. Конгруэнции C_0 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения конгруэнции C_0 следует, что система (I.6) для неё эквивалентна системе уравнений

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \quad x^1\omega_1+x^2\omega_2=0. \tag{1.7}$$

Это может быть тогда и только тогда, когда выполняется тождество:

$$(\alpha x^1+\beta x^2+\gamma x^3)(x^1\omega_1+x^2\omega_2)\equiv\{x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)+$$

$$+(x^1)^2\omega_2^1+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)\}, \qquad (1.8)$$

где α,β,γ – некоторые функции от главных и вторичных параметров. Из (I.8) следует:

$$\begin{gathered}\alpha\omega_2+\beta\omega_1=\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3,\quad \omega_3^2-\omega_1^3=\gamma\omega_1,\\ \alpha\omega_1=\omega_1^2,\quad \beta\omega_2=\omega_2^1,\quad \omega_3^1-\omega_2^3=\gamma\omega_2.\end{gathered}\qquad (1.9)$$

Замыкая (I.9), находим:

$$\begin{gathered}\delta\alpha=\alpha(\pi_4^4-\pi_2^2)-\pi_4^2,\quad \delta\beta=\beta(\pi_4^4-\pi_1^1)-\pi_4^1,\\ \delta\gamma=\gamma(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2)+\pi_4^3.\end{gathered}\qquad (1.10)$$

Из (I.10) следует, что можно осуществить фиксацию

$$\alpha=\beta=\gamma=0. \qquad (1.11)$$

При этом вершина A_4 репера R фиксируется. Замыкая уравнения

$$\omega_3^4=0,\quad \omega_i^j=0,\quad \omega_3^i-\omega_j^3=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0, \qquad (1.12)$$

приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции C_0 к виду (I.I2) и

$$\begin{gathered}\omega_4^3=0,\quad \omega_4^i=m\omega_j,\quad \omega_i^3=a\omega_i+b_j\omega_j,\\ dm+8m\omega_3^3=0.\end{gathered}$$

Здесь и в дальнейшем i,j,k =I,2; $i\neq j$, и по индексам i и j суммирование не производится. Анализируя эту систему, убеждаемся, что она имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

§2. Инвариантная квадрика Q конгруэнции C_0

Т е о р е м а 2.I. Конгруэнция коник тогда и только тогда является конгуэнцией C_0, когда все её коники C принадлежат одной квадрике.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть конгруэнция коник является конгруэнцией C_0. Тогда имеют место уравнения (I.I2),(I.I3). Рассмотрим квадрику Q :

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+m(x^4)^2-2x^1x^2=0. \qquad (2.1)$$

Коника C, определяемая уравнениями (I.I), принадлежит квадрике Q. Так как

$$d\mathcal{F}=-2\mathcal{F}\omega_3^3, \qquad (2.2)$$

то Q – инвариантная квадрика.

Достаточность. Пусть все коники C конгруэнции (C) принадлежат одной квадрике Q, причем плоскости коник C образуют двупараметрическое семейство и характеристическая точка A_3 плоскости коники не инцидентна конике.

Отнесем конгруэнцию (C) к геометрически фиксированному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_4 – полюс квадрики Q относительно плоскости коники C, а A_i (i,j,k =I,2) – точки пересечения с Q прямой, полярно сопряженной прямой A_3A_4 относительно Q. Тогда уравнения коники C и квадрики Q запишутся соответственно в виде

$$f\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0, \qquad (2.3)$$

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+m(x^4)^2-2x^1x^2=0. \qquad (2.4)$$

Так как квадрика Q – инвариантная, то выполняется условие

$$d\mathcal{F}=\lambda\mathcal{F}. \qquad (2.5)$$

Имеем:

$$d\mathcal{F}=-2\omega_3^3\mathcal{F}+2(x^1)^2\omega_1^2+2(x^2)^2\omega_2^1+2x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+$$

$$+2x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3)+2x^1x^4(\omega_4^2-m\omega_1)+2x^2x^4(\omega_4^1-m\omega_2)-$$

$$-2x^3x^4\omega_4^3+2x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3). \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.6), с (2.5), и учитывая, что A_3 – характеристическая точка плоскости коники C, находим:

$$\omega_3^4=0,\ \ \omega_1^2=0,\ \ \omega_2^1=0,\ \ \omega_3^2-\omega_1^3=0,\ \omega_3^1-\omega_2^3=0,$$
$$\omega_4^2=m\omega_1,\ \omega_4^1=m\omega_2,\ \omega_4^3=0,\ \omega_1^1+\omega_2^2+2\omega_3^3=0. \qquad (2.7)$$

Кроме того,

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3\kappa}\,\omega_\kappa. \qquad (2.8)$$

Система уравнений (2.7),(2.8) эквивалентна системе уравнений (I.I2),(I.I3),определяющих конгруэнцию C_0 .Из доказанной теоремы вытекает простая геометрическая характеристика вершины A_4 построенного в §I репера R конгруэнции C_0 : она является полюсом плоскости коники C относительно инвариантной квадрики Q ,содержащей все коники конгруэнции C_0 .Эта теорема дает безынтегральное представление конгруэнции C_0 : она образована сечениями заданной квадрики касательными плоскостями произвольной гладкой поверхности.

§3.Конгруэнция квадрик с фокальной конгруэнцией коник

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией K_0 называется конгруэнция невырожденных квадрик,на каждой квадрике которой фокальное многообразие [2 ,с.II7] содержит конику C конгруэнции (C).

Т е о р е м а 3.I.Конгруэнции K_0 существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Отнесем конгруэнцию K_0 к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_3 -характеристическая точка плоскости коники, A_i $(i,j,\kappa=1,2)$-точки пересечения с коникой C поляры точки A_3 относительно квадрики Q .При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики Q и уравнения коники C запишутся в виде:

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0, \qquad (3.1)$$

$$\mathfrak{f}\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0. \qquad (3.2)$$

Так как коника C принадлежит фокальному многообразию квадрики Q ,то

$$d\mathcal{F}\Big|_{x^4=0}=\lambda\mathfrak{f}. \qquad (3.3)$$

Имеем:

$$\tfrac{1}{2}d\mathcal{F}=(\theta-\omega_4^4)\mathcal{F}+(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)x^1x^2+(\omega_3^2-\omega_1^3)x^1x^3+$$
$$+(\omega_3^1-\omega_2^3)x^2x^3+(\omega_4^2-\omega_1)x^1x^4+(\omega_4^1-\omega_2)x^2x^4+$$
$$+(\omega_4^4-\omega_3^3)(x^3)^2-\omega_4^3x^3x^4+\omega_1^2(x^1)^2+\omega_2^1(x^2)^2, \qquad (3.4)$$

где $\mathcal{D}\theta=0$, $\omega_{\mathcal{J}}^{\varkappa}$ $(\mathcal{J},\varkappa=1,2,3,4)$-компоненты инфинитезимальных перемещений репера и $\omega_i\overset{def}{=}\omega_i^4$.Учитывая,что A_3 - характеристическая точка плоскости коники C и используя формулы (3.3),(3.4) находим:

$$\omega_3^4=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_3^i-\omega_j^3=0,\ \ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0. \qquad (3.5)$$

Условие эквипроективности $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}=0$ дает

$$3\omega_3^3+\omega_4^4=0. \qquad (3.6)$$

Замыкая пфаффовы уравнения (3.5),получим:

$$\omega_4^1\wedge\omega_2=0,\ \omega_4^2\wedge\omega_1=0,\ \omega_4^3\wedge\omega_1=0,\ \ \omega_4^3\wedge\omega_2=0,$$
$$\omega_4^1\wedge\omega_1+\omega_4^2\wedge\omega_2=0,\ \ \omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0. \qquad (3.7)$$

В силу (3.7) пфаффова система уравнений конгруэнции K_0 запишется в виде

$$\omega_i^j=0,\ \omega_3^i-\omega_j^3=0,\ \ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \omega_3^4=\omega_4^3=0,$$
$$\omega_4^i=(1+a)\omega_j,\ \ \omega_3^i=b_i\omega_i+c\,\omega_j, \qquad (3.8)$$
$$4\omega_3^3=S^\kappa\omega_\kappa,\ \ da=2(1+a)(\omega_4^4-\omega_3^3).$$

Она определяет конгруэнции K_0 с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3.2. Все квадрики конгруэнции K_0 касаются одной квадрики вдоль коник C .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Рассмотрим квадрику

$$\Phi\equiv(1+a)(x^4)^2+(x^3)^2-2x^1x^2=0. \qquad (3.9)$$

Квадрика (3.I) касается квадрики (3.9) вдоль коники (3.2). Так как

$$d\Phi = -\Phi\,\omega_3^3\,, \qquad (3.10)$$

то квадрика (3.9)-инвариантная.

С л е д с т в и е.Фокальная конгруэнция коник C является конгруэнцией C_o .

Т е о р е м а 3.3.Пусть Q^* –квадрика, S -произвольная гладкая поверхность,(С) -конгруэнция коник C ,являющихся сечениями квадрики Q^* касательными плоскостями к поверхности S , Q –квадрики,касающиеся квадрики Q^* вдоль коник C .Конгруэнция (Q) квадрик Q является конгруэнцией K_o .Эта теорема дает безынтегральное представление конгруэнции K_o Доказательство её аналогично доказательству теоремы 2.I,

Т е о р е м а 3.4.Фокальное многообразие квадрики $Q\in K_o$ состоит из коники C и двух точек пересечения с квадрикой Q прямой

$$a x^1 + s^1 x^4 = 0\,, \qquad a x^2 + s^2 x^4 = 0\,, \qquad (3.11)$$

проходящей через характеристическую точку A_3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Фокальное многообразие квадрики $Q\in K_o$ определяется уравнениями

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0,\; x^4(s^1x^4-ax^1)=0,\; x^4(s^2x^4-ax^2)=0\,. \qquad (3.12)$$

Следовательно,оно состоит из коники (3.2) и пары точек

$$M_\varepsilon = -s^k A_k + \varepsilon\sqrt{2s^1s^2-a^2}\,A_3 + aA_4\,, \qquad (3.13)$$

инцидентных прямой (3.II),содержащей характеристическую точку A_3, и квадрике Q .

Список литературы

I .М а л а х о в с к и й В.С.,Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами."Тр.Томского ун-та",I60,I962,5-I5

2.М а л а х о в с к и й В.С.,М а х о р к и н В.В.,Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр.Геом.семинара ВИНИТИ СССР,I974,6,II3-I33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 5I3.73

В.В.М а х о р к и н

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются однопараметрические семейства невырожденных квадрик (многообразия $K(I,3)$) в трехмерном проективном пространстве.Доказано,что в общем случае квадрики огибают некоторую поверхность S ,касаясь её вдоль кривой четвертого порядка L ,кривая L огибает в общем случае восемь линий,лежащих на поверхности S .

§I. Фокальные многообразия ранга один и ранга два многообразия $K(I,3)$

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3, отнесенном к подвижному реперу $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$,однопараметрическое семейство (многообразие (I,3) невырожденных поверхностей второго порядка.Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta\,, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\ldots = 1,2,3,4)\,, \qquad (1.1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0\,. \qquad (1.3)$$