УДК 514.764.32

И. А. Гордеева

(Владимирский государственный педагогический университет)

ШЕСТЬ КЛАССОВ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ МЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗНОСТЕЙ

Дана классификация несимметрических метрических связностей на основе теории представлений групп, и рассмотрен один из выделенных классов. Результаты работы были анонсированы в [1].

§ 1. Несимметрические метрические связности

Рассмотрим n-мерное риманово многообразие M с метрическим тензором g и связностью Леви-Чивита ∇. Заданная на M линейная связность $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S называется *несимметрической метрической связностью*, если $\overline{\nabla}g = 0$. Обозначим через $\overline{S}$ такой тензор, что $\overline{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z)$ для любых $X,Y,Z \in TM$, в каждой точке $x \in M$. Очевидно, что $\overline{S}_x \in \Lambda^2\left(T_x^*M\right) \otimes T_x^*M$.

Введем в рассмотрение два оператора: оператор альтернации $\Lambda^3 : \Lambda^2\left(T_x^*M\right) \otimes T_x^*M \to \Lambda^3\left(T_x^*M\right)$ и оператор вычисления следа тензора $(tr_{23}\, W)(X) = \sum\limits_{k=1,\dots,n} W(X,e_k,e_k)$ для произвольного $W_x \in \Lambda^2\left(T_x^*M\right) \otimes T_x^*M$ и ортонормированного базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ пространства T_xM. Тогда справедливо разложение

$$\begin{aligned}\Lambda^2\left(T_x^*M\right) \otimes T_x^*M = T_x^*M \wedge \mathbf{R}g_x \oplus \Lambda^3\left(T_x^*M\right) \oplus \\ \oplus Ker\,\Lambda^3 \cap Ker\left(tr_{23}\right)\end{aligned} \tag{1.1}$$

Непосредственно проверяется, что компоненты разложения (1.1) являются ортогональными и, более того, они неприводимы (см. [2]) относительно действия ортогональной группы $O(n, \mathbf{R})$. В соответствии с этим разложением инвариантным образом выделим шесть классов несимметрических метрических связностей $\overline{\nabla}$. При этом к одному классу будем относить все связности $\overline{\nabla}$, для которых тензор $\overline{S}_x$ принадлежит одному и тому же инвариантному подпространству из $\Lambda^2(T_x^* M) \otimes T_x^* M$ для всех $x \in M$. В результате классы несимметрических метрических связностей определятся следующими условиями:

1) $\overline{\nabla} \in C_1$, если $\overline{S}_x \in T_x^* M \wedge \mathbf{R} g_x$ для всех $x \in M$, или $\overline{S}(X, Y, Z) = (n-1)^{-1} \left[g(Z, X) \left(tr_{23}\, \overline{S} \right)(Y) - g(Z, Y) \left(tr_{23}\, \overline{S} \right)(X) \right]$;

2) $\overline{\nabla} \in C_2$, если $\overline{S}_x \in \Lambda^3 \left(T_x^{\,*} M \right)$ для всех $x \in M$;

3) $\overline{\nabla} \in C_3$, если $\overline{S}_x \in Ker\, \Lambda^3 \cap Ker \left(tr_{23}\, \overline{S} \right)$ для всех $x \in M$, или $\overline{S}(X, Y, Z) + \overline{S}(Y, Z, X) + \overline{S}(Z, X, Y) = 0$ и $\left(tr_{23}\, \overline{S} \right)(X) = {}$ $= \sum_{k=1,\ldots,n} \overline{S}(X, e_k, e_k) = 0$;

4) $\overline{\nabla} \in C_1 \oplus C_3$, если $\overline{S}_x \in Ker\, \Lambda^3$ для всех $x \in M$, или $\overline{S}(X, Y, Z) + \overline{S}(Y, Z, X) + \overline{S}(Z, X, Y) = 0$;

5) $\overline{\nabla} \in C_1 \oplus C_2$, если $\overline{S}_x \in g_x \wedge \mathbf{R}\, T_x^* M \oplus \Lambda^3 \left(T_x^* M \right)$ для всех $x \in M$, или $\overline{S}(X, Y, Z) + \overline{S}(X, Z, Y) = {}$
$= (n-1)^{-1} \left[2g(Z, X) \left(tr_{23} \overline{S} \right)(Y) - g(X, Y) \left(tr_{23} \overline{S} \right)(Z) - g(Z, Y) \left(tr_{23} \overline{S} \right)(X) \right]$;

6) $\overline{\nabla} \in C_2 \oplus C_3$, если $\overline{S}_x \in Ker\left(tr_{23} \right)$ для всех $x \in M$, или $\left(tr_{23}\, \overline{S} \right)(X) = \sum_{k=1,\ldots,n} \overline{S}(X, e_k, e_k) = 0$ для любых $X, Y, Z \in TM$.

При этом класс C_1 состоит из *полусимметрических метрических связностей*, которые были введены в рассмотрение К. Яно (см. [3]) и продолжают вызывать интерес исследователей до последнего времени (см., напр., [4; 5]).

Полусимметрические (не метрические) связности на гладких многообразиях M рассматривались в монографии А. П. Нордена (см. [6, с. 148—149]).

Связности класса $\mathcal{C}_2$ определил К. Яно (см. [7, с. 78—92]) с целью расширения области применения «техники Бохнера», и им же было доказано, что связности $\overline{\nabla} \in \mathcal{C}_2$ естественным образом возникают в пространстве полупростой группы Ли (см. там же).

§ 2. Класс C₂ несимметрических метрических связностей

Напомним, что пара связностей $\overline{\nabla}$ и $\tilde{\overline{\nabla}} = \overline{\nabla} + 2S$ называется (см. [6, с. 129]) *взаимной*. Полагаем $S_{jk\,.}^{\;\;\;i} = 2^{-1}\left(\overline{\Gamma}_{jk}^{i} - \overline{\Gamma}_{kj}^{i}\right)$ для коэффициентов $\overline{\Gamma}_{jk}^{i}$ связности $\overline{\nabla}$, найденных в локальной системе координат $x^1,..., x^n$ на M, тогда коэффициентами взаимных связностей будут $\overline{\Gamma}_{jk}^{i}$ и $\tilde{\overline{\Gamma}}_{jk}^{i} = \overline{\Gamma}_{kj}^{i} = \overline{\Gamma}_{jk}^{i} - 2S_{jk\,.}^{\;\;\;i}$. Из них можно построить коэффициенты $2^{-1}\left(\overline{\Gamma}_{jk}^{i} + \overline{\Gamma}_{kj}^{i}\right)$ *средней связности* $\overset{c}{\overline{\nabla}}$ взаимной пары (см. там же). Поскольку при этом (см. [7, с. 79]) коэффициенты $\overline{\Gamma}_{jk}^{i}$ связности $\overline{\nabla}$ и Γ_{jk}^{i} связности Леви-Чивита ∇ соединены равенствами вида

$$\overline{\Gamma}_{jk}^{i} = \Gamma_{jk}^{i} + S_{jk\,.}^{\;\;\;i} - S_{\cdot jk}^{i} - S_{\cdot kj}^{i}, \tag{2.1}$$

где $S_{.\,jk}^{i} = g^{is} g_{kt} S_{sj\,.}^{\;\;\;t}$, то нетрудно заключить, что средняя связность $\overset{c}{\overline{\nabla}}$ будет совпадать со связностью Леви-Чивита ∇ тогда и только тогда, когда $\overline{S}_x \in \Lambda^3\left(T_x{}^{*}M\right)$ или, что то же самое, $\overline{\nabla} \in \mathcal{C}_2$.

Обозначим через $T = \overline{\nabla} - \nabla$ *тензор деформации* связности ∇ в связность $\overline{\nabla}$. Его компоненты можно найти с помощью равенств (2.1). Поскольку $\overline{\nabla} g = 0$, то тензор $\overline{T}$ такой, что $\overline{T}(X, Y, Z) = g(T(X, Y), Z)$ для любых $X, Y, Z \in TM$, т. е. в каждой точке $x \in M$ он будет удовлетворять условию $\overline{T}_x \in T_x^* M \otimes \Lambda^2 \left(T_x{}^* M\right)$. На основании (2.1) заключаем, что $\overline{S}_x \in \Lambda^3 \left(T_x{}^* M\right)$ тогда и только тогда, когда $\overline{T}_x \in \Lambda^3 \left(T_x{}^* M\right)$ в каждой точке $x \in M$.

Предположим теперь, что геодезические линии $x^k = x^k(t)$ произвольной несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ являются геодезическими линиями связности Леви-Чивита ∇ и обратно, т. е. уравнения

$$\frac{d^2 x^k}{dt} + \overline{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \lambda(t) \frac{dx^k}{dt}; \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2 x^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \mu(t) \frac{dx^k}{dt} \tag{2.3}$$

выполняются одновременно. Из уравнений (2.2) на основании уравнений (2.3) последует

$$P_{ij\cdot}{}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \nu(t) \frac{dx^k}{dt}, \tag{2.4}$$

где $P_{ij\cdot}{}^k = 2^{-1}\left(T_{ij\cdot}{}^k + T_{ji\cdot}{}^k\right)$ и $\nu(t) = \lambda(t) - \mu(t)$. Это означает (см. [8], стр. 193—194), что для $p_j = (n+1)^{-1} P_{kj\cdot}{}^k$ выполняется $P_{ij\cdot}{}^k = 2^{-1}\left(T_{ij\cdot}{}^k + T_{ji\cdot}{}^k\right) = \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i$. Отсюда с учетом (2.1) находим, что $S_{kij} + S_{kji} = g_{ki} q_j + g_{kj} q_i$, где $q_j = -2^{-1} p_j$. Если проциклировать последнее равенство по всем трем индексам, получим еще два равенства вида:

$$S_{ijk} + S_{ikj} = g_{ij} q_k + g_{ki} q_j \text{ и } S_{jki} + S_{jik} = g_{ji} q_k + g_{kj} q_i.$$

Складывая все три эти равенства почленно, получаем $g_{ki} q_j + g_{kj} q_i + g_{ij} q_k = 0$. Свернем затем члены последнего равенства с g^{ki} и найдем, что $q_j = 0$. В результате $\overline{T}_x \in \Lambda^3\left(T_x^{\ *}M\right)$, что равносильно $\overline{S}_x \in \Lambda^3\left(T_x^{\ *}M\right)$ в каждой точке $x \in M$.

Обратное очевидно, т.е. из условия $\overline{S}_x \in \Lambda^3\left(T_x^{\ *}M\right)$ автоматически следует совпадение геодезических в связностях $\overline{\nabla}$ и ∇ . Доказана

Теорема. *Для несимметрической метрической связности* $\overline{\nabla}$*, заданной на римановом многообразии* (M, g) *со связностью Леви-Чивита* ∇*, следующие четыре условия равносильны:*

1) $\overline{\nabla} \in C_2$*;*

2) $\overline{T}_x \in \Lambda^3\left(T_x^{\ *}M\right)$ *для тензора деформации* $T = \overline{\nabla} - \nabla$ *;*

3) средняя связность $\overset{c}{\nabla}$ *взаимной пары связностей* $\overline{\nabla}$ *и* $\tilde{\nabla} = \overline{\nabla} + 2S$ *совпадает со связностью* ∇ *;*

4) геодезические линии связностей $\overline{\nabla}$ *и* ∇ *совпадают.*

Список литературы

1. *Гордеева И.А.* Несимметрические метрические связности и их классификация // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2006. Т. 34. С. 62—64.
2. *Степанов С.Е.* О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла // Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 111. №1. С. 32—43.
3. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.
4. *Uysal S.A., Laleoğlu R.Ö.* On weakly symmetric spaces with semi-symmetric metric connection // Publ. Math. 2005. Vol. 67. № 1—2. P. 145—154.
5. *Yaşar E., Cöken A.C., Yücesan A.* Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Int. J. Pure Appl. Math. 2005. Vol. 23. № 3. P. 379—391.
6. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
7. *Яно К.* Кривизна и числа Бетти. М., 1957.
8. *Схоутен И.А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., 1948.

I. Gordeeva

SIX CLASSES OF NON-SYMMETRIC METRIC CONNECTIONS

We use the theory of group representations to classify non-symmetric metric connections. We also consider one of such classes.

УДК 514.7

А. И. Долгарев, И. А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА С ДИССОНОМ

Найдены символы Кристоффеля и формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци. Полная кривизна поверхности одулярного галилеева пространства с диссоном не относится к внутренней геометрии поверхности.

Действительные одули Ли определяются на группах Ли посредством введения операции умножения элементов группы Ли на действительные числа. Существует пять видов 3-мерных разрешимых одулей Ли: линейное пространство, растран, сибсон, диссон и осцилляторный одуль [1]. На одулях Ли рассматривается галилеева норма. Наличие внешней операции на одуле Ли позволяет дифференцировать одулярные функции по аналогии с векторными. Заменяя в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства линейное пространство одулем Ли, получаем вейлевские одулярные пространства — ВО-пространства. Ранее исследованы кривые и поверхности всех ВО-пространств, кроме пространства с диссоном. Некоторые результаты опубликованы в выпусках 32—36 настоящего сборника.