About the authors

Prof Leonid Zinin, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: leonid.zinin@gmail.com

Alexandr Sharamet, ass., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: alexsharamet@gmail.com

Alevtina Vasileva, ass., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vasilyeva.alevtina@gmail.com

УДК 514.75 (08)

Ю. И. Попов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РЕГУЛЯРНОЙ КАСАТЕЛЬНО *r*-ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Введены π-структуры и почти контактные структуры в касательных T-, Λ-, L-подрасслоениях регулярной касательно r-оснащенной гиперполосы $H_{m,r}$ n-мерного проективного пространства.

Даны аналитические признаки и геометрические интерпретации рассматриваемым структурам.

π-structures and almost contact structures in the tangent T-, Λ-, L-subbundles of the regular tangently r-framed hyperstrip H_m of the n-dimensional projective space are introduced.

Analytical signs and geometrical interpretations characterize the examined structures.

Ключевые слова: гиперполоса, π-структура, *T*-структура, почти контактная структура, касательное оснащение, подрасслоение, проективное пространство.

Key words: hyperstrip, π-structure, *T*-structure, almost contact structure, tangent framing, subbundle, projective space.

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1, n};\ \overline{J}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n};\ i, j, k, l = \overline{1, m};\ \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k} = \overline{1, m-1};\ u, v, w = \overline{m+1, n};$$
$$a, b, c = \overline{r+1, m};\ \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} = \overline{r+1, m-1};\ p, q, s, t = \overline{1, r};\ \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{t} = \overline{1, r-1};$$
$$\tilde{A}, \tilde{B} = \overline{r+1, n};\ s = m - r;\ i = \{a, p\};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}.$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 3. С. 52 – 63.

1. π-структуры поля касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$

1. Известно [1], что относительно репера $\{A_{\bar{J}}\}$ 1-го порядка R_1 касательно r-оснащенная регулярная гиперполоса $H_{m,r} \subset P_n$ задается следующими уравнениями:

$$\omega_0^n = 0, \omega_0^\alpha = 0, \omega_\alpha^n = 0,$$

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega^j, \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega^j, \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \omega_p^a = \Lambda_{pj}^a \omega^j, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n\omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^n\omega_0^k, \nabla\Lambda_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha j}^i\omega_0^0 - \delta_j^i\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha jk}^i\omega^k,\\ \nabla\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha\omega_0^0 + \Lambda_{ij}^n\omega_n^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha\omega^k, \nabla\Lambda_{pj}^a + \Lambda_{pj}^a\omega_0^0 + \Lambda_{pj}^n\omega_n^a - \delta_j^a\omega_p^0 = \Lambda_{pjk}^a\omega^k,\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\nabla\Lambda_{[ij]}^n = 0, \nabla\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0, \nabla\Lambda_{\alpha[i}^k\Lambda_{j]k}^n = 0.$$

Чистое замыкание (2) системы (1) представим в виде

$$\Delta\Lambda_{ij}^n \wedge \omega^j = 0, \Delta\Lambda_{\alpha j}^i \wedge \omega^j = 0, \Delta\Lambda_{ij}^\alpha \wedge \omega^j = 0, \Delta\Lambda_{pj}^a \wedge \omega^j = 0. \tag{3}$$

Введем обозначение $A = (n - m - 1)m + sr$. Найдем характеры системы (3) согласно работе [1]:

$$\begin{gathered}S_1 = (n-m)m + A, S_2 = (n-m)(m-1) + A,\\ S_3 = (n-m)(m-2) + A, \ldots, S_m = (n-m)(m-(m-1)) + A.\end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая (4), вычислим число Картана системы уравнений (3):

$$\begin{gathered}Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \ldots + mS_m =\\ = m(n-m) + 2(m-1)(n-m) + 3(m-2)(n-m) +\\ + \ldots + m(m-(m-1))(n-m) + A(1+2+3+\ldots+m) =\\ = (n-m)(1\cdot m + 2(m-1) + 3(m-2) + \ldots + m(m-(m-1))) + \frac{m(m+1)}{2}A =\\ = (n-m)\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{m(m+1)}{2}A.\end{gathered}$$

Разрешим систему (3) по лемме Картана

$$\Delta\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n\omega^k, \Delta\Lambda_{\alpha j}^i = \Lambda_{\alpha jk}^i\omega^k, \Delta\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha\omega^k, \Delta\Lambda_{pj}^a = \Lambda_{pjk}^a\omega^k \tag{5}$$

и найдем число $\mathcal{N}$ линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (5):

$$\mathcal{N} = (n-m)\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + ((n-m-1)m + rs)\frac{m(m+1)}{2},$$

т. е. $\mathcal{N} = Q$. Данная система (1) находится в инволюции [1].

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Гиперполоса $H_{m,r} \subset P_n$ существует с произволом*

$$S_m = (n-m) + (n-m-1)m + rs = (m+1)(n-m-1)m + rs + 1$$

функций m аргументов.

2. Пусть на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$ задано внутренним инвариантным образом поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода ν_s [2]. Таких нормалей ν_s построено целое однопараметрическое семейство [2]. Поле оснащающих Λ-плоскостей (T-структура [3]) и поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей ν_s (вторая T-структура) порождают π-структуру в расслоении касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$. Действительно, в каждой точке $A_0 \in V_m$ имеем

$$[\nu_s(A_0), \Lambda(A_0)] = T_m(A_0), \ \nu_s(A_0) \cap \Lambda(A_0)] = A_0. \tag{6}$$

Известно [4], что всякая π-структура вполне определяется полем аффинора $\{\mathcal{A}_j^i\} \neq \{\delta_j^i\}$, удовлетворяющего соотношениям

$$\mathcal{A}_k^j \mathcal{A}_i^k = \delta_i^j. \tag{7}$$

Найдем компоненты аффинора $\mathcal{A}_j^i$, удовлетворяющего условиям (7) и (6). В силу выбора репера $R^1(N)$ можем написать следующие разложения:

$$T_i = \Lambda_i^k A_k, \tag{8}$$

где

$$\left\|\Lambda_i^k\right\| = \left\|\begin{matrix} \delta_q^p & 0 \\ \nu_a^p & \delta_a^b \end{matrix}\right\|.$$

Так как точки T_i линейно независимы, то матрица $\left\|\Lambda_i^k\right\|$ невырождена, и следовательно, для нее существует обратная матрица

$$\left\|\overset{*}{\Lambda}{}_i^k\right\| = \left\|\begin{matrix} \delta_p^t & 0 \\ -\nu_b^t & \delta_b^c \end{matrix}\right\| \tag{9}$$

такая, что выполняются равенства

$$\Lambda_k^j \overset{*}{\Lambda}{}_i^k = \delta_i^j, \ \Lambda_i^k \overset{*}{\Lambda}{}_k^j = \delta_i^j.$$

Введем в рассмотрение тензор типа (1.1) (аффинор)

$$\mathcal{A}_j^i = \delta_j^i - 2\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_j^p, \ \nabla \mathcal{A}_j^i = \mathcal{A}_{jk}^i \omega_0^k, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{A}_{jk}^i = -2(\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_{jk}^p - \overset{*}{\Lambda}{}_j^p \Lambda_{pk}^i), \tag{11}$$

компоненты которого в силу (8), (9) имеют следующую структуру:

$$\mathcal{A}_p^q = -\delta_p^q, \ \mathcal{A}_p^a = 0, \ \mathcal{A}_a^p = 2\nu_a^p, \ \mathcal{A}_a^b = \delta_a^b. \tag{12}$$

Таким образом, аффинор $\mathcal{A}^i_j$ (10) охватывается объектами T-структур, инициирующих данную π-структуру, и удовлетворяет условиям (7). В силу теоремы 2 [1] и построений этого пункта имеет место

Теорема 2. *Поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$ несет однопараметрическое семейство π-структур, внутренне связанных с данной гиперполосой и определенных пучком аффиноров $\mathcal{A}^i_j(\sigma)$, где*

$$\left\|\mathcal{A}^i_j(\sigma)\right\| = \left\|\begin{matrix} -\delta^p_q & 0 \\ 2\nu^p_a(\sigma) & \delta^b_a \end{matrix}\right\|.$$

3. Установим критерий интегрируемости π-структуры (Λ, ν_s), определенной аффинором $\mathcal{A}^i_j$ (10). Известно [3], что интегрируемость π-структуры характеризуется обращением в нуль тензора кручения данной π-структуры. В свою очередь, так как тензор кручения π-структуры только постоянным множителем отличается от тензора Нейенхейса $\{\mathfrak{N}^i_{kj}\}$, где

$$\mathfrak{N}^i_{kj} = \mathcal{A}^p_j(\mathcal{A}^i_{pk} - \mathcal{A}^i_{kp}) - \mathcal{A}^p_k(\mathcal{A}^i_{pj} - \mathcal{A}^i_{jp}) + \mathcal{A}^a_j(\mathcal{A}^i_{ak} - \mathcal{A}^i_{ka}) - \mathcal{A}^a_k(\mathcal{A}^i_{aj} - \mathcal{A}^i_{ja}), \qquad (13)$$

то интегрируемость π-структуры (Λ, ν_s) сводится к обращению в нуль компонент тензора Нейенхейса (13).

Для простоты изложения найдем компоненты тензора Нейенхейса в репере $R^1(N, \nu_s)$, адаптированном полю ν_s-плоскостей (ν_s-расслоению). В этом репере $\omega^p_a = \nu^p_{ak}\omega^k_0$ и $\nu^p_a(\underline{\sigma}) = 0$ ($\underline{\sigma}$ — фиксированное значение параметра σ). Предварительно продифференцировав равенства (7), получим следующие связи на компоненты аффинора $\mathcal{A}^i_j$ (10):

$$\mathcal{A}^j_{kl}\mathcal{A}^k_i + \mathcal{A}^j_k\mathcal{A}^k_{il} = 0. \qquad (14)$$

Теперь, учитывая соотношения (7), (11), (12), (14), вычисляем компоненты тензора Нейенхейса π-структуры (Λ, ν_s):

$$\begin{cases} \mathfrak{N}^i_{pa} = 0, \mathfrak{N}^p_{qt} = 0, \mathfrak{N}^a_{bc} = 0, \\ \mathfrak{N}^a_{pq} = -4(\Lambda^a_{pq} - \Lambda^a_{qp}) = -8r^a_{pq}, \mathfrak{N}^p_{ab} = -4(\nu^p_{ab}(\underline{\sigma}) - \nu^p_{bq}(\underline{\sigma})) = -8r^p_{ab}(\underline{\sigma}). \end{cases} \qquad (15)$$

Из выражения (15) следует, что обращение в нуль всех компонент тензора Нейенхейса равносильно равенству нулю тензоров неголономности r^a_{pq} и $r^p_{ab}(\underline{\sigma})$ соответственно Λ-распределения и ν_s-распределения на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$. Получаем, что π-структура $(\Lambda, \nu_s(\underline{\sigma}))$, определенная аффинором $\mathcal{A}^i_j(\underline{\sigma})$, интегрируема тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензоры неголономности r^a_{pq} и $r^p_{ab}(\underline{\sigma})$ соответственно базовых распределений (Λ-распределения и ν_s-распределения) данной π-структуры.

Интегрируемость π-структуры означает расслоение базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}$ на два семейства подмногообразий:

а) s-параметрическое семейство r-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости Λ) Λ-подрасслоения;

б) r-параметрическое семейство s-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости $\nu_s(\underline{\sigma})$) $\nu_s(\underline{\sigma})$-подрасслоения.

Другими словами, через каждую точку $A_0 \in V_m$ проходит по одной поверхности каждого из семейств. Многообразие элементов π-структуры, касательных к этим поверхностям (V_r, V_s), образует голономную композицию, а интегральные многообразия этой голономной композиции — композицию А. П. Нордена [5]. Учитывая эту связь, Р. Ф. Домбровский [6] вводит для неинтегрируемых (соответственно интегрируемых) π-структур названия неголономной (соответственно голономной) композиции А. П. Нордена.

56

Определение [6]. *Неголономной композицией А. П. Нордена* на дифференцируемом многообразии X_m называется дифференциально-геометрическая структура, индуцированная парой полей геометрических объектов, порождающих два распределения плоскостных элементов Λ_r и ν_s (в общем случае неинволютивных) таких, что в каждой точке $x \in X_m$: $[\Lambda_r, \nu_s] = T_x$, $\Lambda_r \cap \nu_s = x$. Распределения Λ_r и ν_s называются *базовыми распределениями* неголономной композиции (Λ, ν).

Из результатов исследований этого пункта и теоремы 2 следует

Теорема 3. *Регулярная гиперполоса $H_{m,r}$ внутренним инвариантным образом порождает в поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m однопараметрический пучок неголономных композиций А. П. Нордена* $(\Lambda, \nu(\sigma))$, *базовыми распределениями каждой из которых являются распределения Λ-плоскостей и $\nu_s(\sigma)$-плоскостей. Обращение тензоров неголономности r^a_{pq} и $r^p_{ab}(\underline{\sigma})$ соответствующих базовых распределений данной π-структуры* $(\Lambda, \nu(\underline{\sigma}))$ *в нуль есть необходимое и достаточное условие, чтобы базисная поверхность V_m гиперполосы $H_{m,r}$ представляла собой голономную композицию А. П. Нордена* $(V_r, \nu_s(\underline{\sigma}))$, *а соответствующая π-структура* $(\Lambda, \nu_s(\underline{\sigma}))$ *была голономной.*

2. Почти контактные структуры, ассоциированные с регулярной гиперполосой $H_{m,r}$

Осью пучка (φ, w) нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, определяемого нормалью Фубини 2-го рода $\varphi(A_0)$ [7, п. 11] и нормалью Вильчинского 2-го рода $w(A_0)$ [7, п. 11], является $(m-2)$-плоскость $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$:

$$x^u = 0,\ x^0 - F^0_i x^i = 0,\ \mathcal{C}^0_i x^i = 0,\ \mathcal{C}^0_i = F^0_i - W^0_i. \tag{16}$$

Вместе с $A_0 \in V_m$ плоскость $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ натягивает $(m-1)$-плоскость

$$\mathcal{C}_{m-1}(A_0) = [A_0, \mathcal{C}_{m-2}(A_0)] \overset{\text{def}}{=} \mathcal{C}(A_0),$$

которую назовем *C-плоскостью*. Учитывая, что плоскости $\varphi(A_0)$, $w(A_0)$ и плоскость Нордена — Тимофеева $\rho(A_0)$ [1] попарно различны (функционально независимы), аналогично находим:

$$\mathcal{A}(A_0) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{m-1}(A_0) = [A_0, \mathcal{A}_{m-2}(A_0)], \mathcal{B}(A_0) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}_{m-1}(A_0) = [A_0, \mathcal{B}_{m-2}(A_0)],$$

где

$$\mathcal{A}_{m-2}(A_0) \overset{\text{def}}{=} \rho(A_0) \cap \varphi(A_0), \mathcal{B}_{m-2}(A_0) \overset{\text{def}}{=} \rho(A_0) \cap w(A_0).$$

Плоскости $\mathcal{A}(A_0)$, $\mathcal{B}(A_0)$, $\mathcal{C}(A_0)$, относительно репера $R^1(N)$ определим соответственно системами уравнений

$$\mathcal{A}(A_0): \mathcal{A}_i^0 x^i = 0, x^u = 0, \tag{17}$$

$$\mathcal{B}(A_0): \mathcal{B}_i^0 x^i = 0, x^u = 0, \tag{18}$$

$$\mathcal{C}(A_0): \mathcal{C}_i^0 x^i = 0, x^u = 0, \tag{19}$$

а плоскости $\mathcal{A}_{m\text{-}2}(A_0)$, $\mathcal{B}_{m\text{-}2}(A_0)$ — соответственно системами уравнений

$$\mathcal{A}_{m-2}(A_0): x^u = 0, x^0 - \rho_i^0 x^i = 0, \mathcal{A}_i^0 x^i = 0,$$

$$\mathcal{B}_{m-2}(A_0): x^u = 0, x^0 - \rho_i^0 x^i = 0, \mathcal{B}_i^0 x^i = 0,$$

где каждая из совокупностей функций

$$\{\mathcal{A}_i^0\} \overset{\text{def}}{=} \{\rho_i^0 - F_i^0\}, \{\mathcal{B}_i^0\} \overset{\text{def}}{=} \{\rho_i^0 - W_i^0\}, \{\mathcal{C}_i^0\} \overset{\text{def}}{=} \{F_i^0 - W_i^0\}$$

образует одновалентный ковариантный тензор.

Теорема 4. *Регулярная гиперполоса $H_{m,r}$ в дифференциальной окрестности не ниже 3-го порядка порождает внутренним инвариантным образом в каждой касательной плоскости $T_m(A_0)$ три однопараметрических пучка $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ $(m-1)$-мерных плоскостей, проходящих через точку $A_0 \in V_m$.*

3. Почти контактные структуры поля касательных плоскостей T_m базисной поверхности гиперполосы $H_{m,r}$

1. В силу невырожденности тензора $\{\mathcal{C}_i^0\}$ имеем, например, $\mathcal{C}_m^0 \neq 0$ (индекс m зафиксирован). Тогда уравнение C-плоскости (19) можно записать следующим образом:

$$x^u = 0, x^m + \gamma_{\tilde{i}}^m x^{\tilde{i}} = 0, \gamma_{\tilde{i}}^m = \frac{\mathcal{C}_{\tilde{i}}^0}{\mathcal{C}_m^0},$$

где функции $\gamma^m_{\tilde{i}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\gamma^m_{\tilde{i}} + \lambda^m_{\tilde{i}}\omega^m_m - \lambda^m_{\tilde{j}}\omega^{\tilde{j}}_{\tilde{i}} + \lambda^m_{\tilde{i}}\lambda^m_{\tilde{k}}\omega^{\tilde{k}}_m - \omega^m_{\tilde{i}} = \gamma^m_{\tilde{i}k}\omega^k_0.$$

Зададим в поле касательных плоскостей T_m подрасслоение прямых (l-подрасслоения). Слой l-подрасслоения, т. е. прямую $l(A_0)$, удовлетворяющую условиям

$$A_0 \in l(A_0),\ l(A_0) \subset T_m(A_0),\ l(A_0) \cap \mathcal{C}(A_0) = A_0,$$

зададим точками $\{A_0, \mathcal{C}_m\}$, т. е. $l(A_0) = [A_0, \mathcal{C}_m]$, где

$$\mathcal{C}_m = A_m + \mathcal{C}^{\tilde{i}}_m A_{\tilde{i}}.$$

l-подрасслоение определено системой дифференциальных уравнений

$$d\mathcal{C}^{\tilde{i}}_m + \mathcal{C}^{\tilde{k}}_m\omega^{\tilde{i}}_{\tilde{k}} - \mathcal{C}^{\tilde{i}}_m\omega^m_m - \mathcal{C}^{\tilde{i}}_m\mathcal{C}^{\tilde{k}}_m\omega^m_{\tilde{k}} + \omega^{\tilde{i}}_m = \mathcal{C}^{\tilde{i}}_{mk}\omega^k_0.$$

2. Рассмотрим фокальное многообразие (характеристику) C-плоскости при смещении вдоль кривых

$$\omega^u_0 = 0,\ \omega^{\tilde{i}}_0 = \mathcal{C}^{\tilde{i}}_m\omega^m_0,\ \omega^m_0 = \mu^m\theta,\ d\theta = \theta \wedge \tilde{\theta}_1,$$

принадлежащих l-подрасслоению. Это фокальное многообразие относительно репера $R^1(N)$ задается уравнениями

$$x^u = 0,\ x^0 - \frac{1}{\mathcal{C}}(\gamma^m_{\tilde{i}m} + \gamma^m_{\tilde{i}\tilde{j}}\mathcal{C}^{\tilde{j}}_m)x^{\tilde{i}} = 0,\ \mathcal{C} = 1 + \gamma^m_{\tilde{i}}\mathcal{C}^{\tilde{i}}_m. \tag{20}$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{C}^0_m \neq 0$, поэтому уравнения (16) плоскости $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ можно представить в следующем виде:

$$x^u = 0,\ x^m + \gamma^m_{\tilde{i}}x^{\tilde{i}} = 0,\ x^0 - f^0_{\tilde{k}}x^{\tilde{k}} = 0,\ f^0_{\tilde{i}} = F^0_{\tilde{i}} - F^0_m\gamma^m_{\tilde{i}}. \tag{21}$$

Сравнивая уравнения (20) и (21), убеждаемся, что плоскость $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ (16) — ось пучка (φ, w) нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(A_0)$ — будет характеристикой C-плоскости (19) тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{C}^{\tilde{i}}_m = \gamma^{\tilde{i}\tilde{k}}_m(\mathcal{C}f^0_{\tilde{k}} - \gamma^m_{\tilde{k}m}),$$

где $\{\gamma^{\tilde{i}\tilde{k}}_m\}$ — обратный фундаментальный объект, определенный равенствами

$$\gamma^{\tilde{i}\tilde{k}}_m\gamma^m_{\tilde{k}\tilde{j}} = \delta^{\tilde{i}}_{\tilde{j}}.$$

3. Введем в рассмотрение геометрический объект

$$\{\tau^j_i\} \overset{\text{def}}{=} \{\delta^j_i - \frac{1}{\mathcal{C}}\mathcal{C}^j_m\gamma^m_i\},$$

где $\mathcal{C}^m_m = 1, \gamma^m_m = 1$, компоненты которого удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \tau^j_k\tau^k_i = \delta^j_i - \dfrac{1}{\mathcal{C}}\mathcal{C}^j_m\gamma^m_i,\ \tau^j_k\mathcal{C}^k_m = 0, \\ \tau^k_i\gamma^m_k = 0,\ \gamma^m_k\mathcal{C}^k_m = \mathcal{C},\ \operatorname{rang}\left\|\tau^j_k\right\| = m-1. \end{cases} \tag{22}$$

Из соотношений (22) вытекает, что объект $\{\tau_i^k\}$ задает в поле касательных плоскостей T_m почти контактную структуру гиперболического типа [8; 9]. Таким образом, приходим к следующей геометрической характеристике почти контактной структуры $(\mathcal{C}, l)$.

Теорема 5. *Поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(A_0)$ несет почти контактную структуру $(\mathcal{C}, l)$, определенную C-подрасслоением и l-подрасслоением, такую, что каждой прямой $l(A_0)$ l-подрасслоения в проективитете Бомпьяни — Пантази соответствует плоскость $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ — ось пучка (φ, w) нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}$.*

Замечание. Построения этого параграфа ассоциированы с плоскостью $\mathcal{C}(A_0)$ (C-плоскостью) (19). Аналогичные построения можно провести, исходя из плоскости $\mathcal{A}(A_0)$ (17) или $\mathcal{B}(A_0)$ (18), т. е. провести построения этого параграфа, ассоциированные с любой из (m – 1)-мерных плоскостей пучков $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

В силу этого замечания и теоремы 5 вытекает

Теорема 6. *Поле касательных плоскостей гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ несет три однопараметрических семейства почти контактных структур, каждая из которых ассоциирована с соответствующей плоскостью, взятых из пучков $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.*

4. Почти контактные структуры Λ-подрасслоения

1. Если $\Lambda(A_0) \subset \mathcal{C}(A_0)$,то $\mathcal{C}_p^0 = 0$. Предположим, что тензор $\{\mathcal{C}_p^0\}$ — ненулевой. Тогда

$$\Lambda(A_0) \cap \mathcal{C}(A_0) = \lambda_{r\text{-}1}(A_0).$$

Плоскость $\lambda_{r\text{-}1}(A_0)$ зададим уравнениями

$$\mathcal{C}_p^0 x^p = 0,\ x^{\tilde{A}} = 0. \qquad (23)$$

Так как тензор $\{\mathcal{C}_p^0\}$ ненулевой, то, например, $\mathcal{C}_r^0 \neq 0$, где r — фиксированный индекс. В силу чего уравнения (23) примут вид

$$x^{\tilde{A}} = 0,\ x^r = -\lambda_{\tilde{p}}^r x^{\tilde{p}},$$

где функции $\lambda_{\tilde{p}}^t = \dfrac{\mathcal{C}_{\tilde{p}}^0}{\mathcal{C}_r^0}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\lambda_{\tilde{p}}^r + \lambda_{\tilde{p}}^r \omega_0^r - \lambda_{\tilde{q}}^r \omega_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} + \lambda_{\tilde{p}}^r \lambda_{\tilde{q}}^r \omega_r^{\tilde{q}} - \omega_{\tilde{p}}^r = \lambda_{\tilde{p}k}^r \omega_0^k.$$

Введем в рассмотрение в поле касательно оснащающих Λ-плоскостей (в касательном Λ-подрасслоении) подрасслоение прямых ϑ таких, что в каждой точке $A_0 \in V_m$ имеем

$$\begin{cases} \vartheta(A_0) \subset \Lambda(A_0),\ \vartheta(A_0) \cap \lambda_{r-1}(A_0) = A_0, \\ \vartheta(A_0) = [A_0, B_r] = [A_0, A_r + B_r^{\tilde{p}} A_{\tilde{p}}]. \end{cases}$$

ϑ-подрасслоение задается в репере $R^1(N)$ системой дифференциальных уравнений

$$dB_r^{\tilde{p}} + B_r^{\tilde{q}}\omega_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} - B_r^{\tilde{p}}\omega_r^r - B_r^{\tilde{p}}B_r^{\tilde{q}}\omega_{\tilde{q}}^r + \omega_r^{\tilde{p}} = B_{rk}^{\tilde{p}}\omega_0^k.$$

2. Плоскость $\lambda_{r-1}(A_0) \subset \Lambda(A_0)$ назовем λ-*плоскостью.*

Пересечение λ-плоскости и плоскости $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ (16) в каждой точке $A_0 \in V_m$ есть $(r-2)$-плоскость

$$\tilde{\Lambda}_{r-2}(A_0) = \mathcal{C}_{m-2}(A_0) \cap \lambda_{r-1}(A_0),$$

которая в локальном репере может быть задана уравнениями

$$x^{\tilde{A}} = 0,\ x^r = -\lambda_{\tilde{p}}^r x^{\tilde{p}},\ x^0 = \beta_{\tilde{p}}^0 x^{\tilde{p}}, \tag{24}$$

где

$$\beta_{\tilde{p}}^0 = F_{\tilde{p}}^0 - F_r^0\lambda_{\tilde{p}}^r.$$

С другой стороны, характеристика (фокальное многообразие) λ-плоскости при смещении точки A_0 вдоль кривых

$$\omega_0^{\tilde{A}} = 0,\ \omega_0^{\tilde{p}} = B_r^{\tilde{p}}\omega_0^r,\ \omega_0^r = \mu^r\theta,\ d\theta = \theta \wedge \hat{\theta}_1, \tag{25}$$

принадлежащих ϑ-подрасслоению, определяется уравнениями

$$x^0 - \frac{1}{B}x^{\tilde{p}}(\lambda_{\tilde{p}r}^r + \lambda_{\tilde{p}\tilde{q}}^r B_r^{\tilde{q}}) = 0,\ x^{\tilde{A}} = 0,\ x^r = -\lambda_{\tilde{p}}^r x^{\tilde{p}},$$

где

$$B = 1 + \lambda_{\tilde{p}}^r B_r^{\tilde{p}}.$$

Плоскость $\tilde{\Lambda}_{r-2}(A_0)$ (24) будет характеристикой λ-плоскости при смещении по кривым (25), принадлежащим ϑ-подрасслоению, тогда и только тогда, когда

$$B_r^{\tilde{t}} = (B\beta_{\tilde{p}}^0 - \lambda_{\tilde{p}r}^r)\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{t}},$$

где $\{\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{t}}\}$ — обратный фундаментальный объект для объекта $\{\lambda_{\tilde{p}\tilde{t}}^r\}$, определяемый равенствами

$$\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{t}}\lambda_{\tilde{t}\tilde{q}}^r = \delta_{\tilde{q}}^{\tilde{p}}.$$

3. Введем в рассмотрение объект $\{\varphi_p^q\}$, компоненты которого зададим соотношениями

$$\varphi_p^q = \delta_p^q - \frac{1}{B}B_r^q\lambda_p^r,$$

где

$$B_r^r = 1,\ \lambda_r^r = 1.$$

Можно показать, что компоненты объекта $\{\varphi_p^q\}$, кроме того, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}\varphi_s^p\varphi_q^s = \delta_q^p - \dfrac{1}{B}B_r^p\lambda_q^r,\ \varphi_s^p B_r^s = 0,\\ \varphi_s^p\lambda_p^r = 0,\ \lambda_q^r B_r^q = B,\ \mathrm{rang}\left\|\varphi_p^q\right\| = r-1.\end{cases} \tag{26}$$

Из (26) вытекает, что объект $\{\varphi_p^q\}$ определяет на касательном Λ-подрасслоении почти контактную структуру гиперболического типа (или (f, ξ, η, ρ)-структуру гиперболического типа специального вида, когда ρ = 0) [8; 9]. В результате имеем следующую геометрическую интерпретацию почти контактной структуры (λ, ϑ).

Теорема 7. *Касательное Λ-подрасслоение несет почти контактную структуру вида* (λ, ϑ)*, определенную λ-подрасслоением и ϑ-подрасслоением, каждому слою (прямой ϑ(A_0)) которого соответствует в проективитете Бомпьяни – Пантази плоскость* $\tilde{\Lambda}_{r-2}(A_0)$ (24) *– пересечение оси* $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ *пучка* (ρ, w) *нормалей 2-го рода гиперполосы* $H_{m,r}$(Λ) *с оснащающей λ-плоскостью (Λϑ-виртуальной нормалью 1-го рода).*

Согласно замечанию п. 3 и в силу теоремы 7 следует

Теорема 8. *Касательное Λ-подрасслоение гиперполосы* $H_{m,r}$(Λ) *несет три однопараметрических семейства почти контактных структур вида* (λ, ϑ)*, ассоциированных соответственно с плоскостями пучков* ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$), ($\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$), ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$).

5. Почти контактные структуры, ассоциированные с *L*-подрасслоением

1. Пусть C-плоскость (19) пересекает L-плоскость (TΛ-виртуальную нормаль 1-го рода). Тогда $\mathcal{C}_p^0 \equiv 0, \mathcal{C}_a^0 \neq 0$ и, следовательно, хотя бы одна из компонент тензора $\{\mathcal{C}_i^0\}$ отлична от нуля. Пусть, например, для определенности $\mathcal{C}_m^0 \neq 0$ (m-фиксированный индекс). Тогда учитывая, что $\mathcal{C}_m^0 \neq 0$, уравнения (s – 1)-плоскости

$$\mathcal{Z}_{s-1} = \mathcal{C}_{m-1}(A_0) \cap L(A_0)$$

представим в виде

$$x^u = 0,\ x^p - \nu_a^p x^a,\ x^m + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m x^{\tilde{a}} = 0,\ \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m = \frac{\mathcal{C}_{\tilde{a}}^0}{\mathcal{C}_m^0},$$

где функции $\mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m\omega_m^m - \mathcal{Z}_{\tilde{c}}^m\omega_{\tilde{a}}^{\tilde{c}} + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m\mathcal{Z}_{\tilde{c}}^m\omega_m^{\tilde{c}} - \omega_{\tilde{a}}^m = \mathcal{Z}_{\tilde{a}k}^m\omega_0^k.$$

Зададим в касательном L-подрасслоении (в поле L-плоскостей) подрасслоение прямых p. Слой p-подрасслоения, т. е. прямую $p(A_0)$, удовлетворяющую условиям

$$p(A_0) \subset L(A_0),\, p(A_0) \cap \mathcal{Z}_{s-1}(A_0) = A_0,$$

определим точками $\{A_0, \mathcal{Z}_m\}$, где

$$\mathcal{Z}_m = A_m + B_m^{\tilde{a}} A_{\tilde{a}}.$$

Касательное p-подрасслоение вполне определено системой дифференциальных уравнений

$$dB_m^{\tilde{a}} + B_m^{\tilde{b}} \omega_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} - B_m^{\tilde{a}} \omega_m^m - B_m^{\tilde{a}} B_m^{\tilde{c}} \omega_{\tilde{c}}^m + \omega_m^{\tilde{a}} = B_{mk}^{\tilde{a}} \omega_0^k.$$

2. Пересечением Z-плоскости с осью $C_{m\text{-}2}$ пучка (φ, w) нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}$ является плоскость $\tilde{\mathcal{Z}}_{s-2}(A_0)$, которая относительно репера $R_1(N)$ может быть представлена уравнениями

$$\begin{cases} x^\alpha = 0,\, x^p - \nu_a^p x^a = 0, \\ x^m + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m x^{\tilde{a}} = 0,\, x^0 - \beta_{\tilde{a}}^0 x^{\tilde{a}} = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\beta_{\tilde{a}}^0 = \hat{F}_{\tilde{a}}^0 - \hat{F}_m^0 \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m,\, \hat{F}_{\tilde{a}}^0 = F_{\tilde{a}}^0 + F_p^0 \nu_{\tilde{a}}^p,\, \hat{F}_m^0 = F_m^0 + F_p^0 \nu_m^p.$$

Найдем фокальное многообразие (характеристику) Z-плоскости (плоскости $\mathcal{Z}_{s-1}(A_0)$) при смещении вдоль кривых

$$\omega_0^\alpha = 0,\, \omega_0^{\tilde{a}} = B_m^{\tilde{a}} \omega_0^m,\, \omega_0^p = \mathcal{Z}_m^p \omega_0^m, \tag{28}$$

принадлежащих распределению прямых p.

Относительно репера $R_1(N)$ искомое фокальное многообразие определяется уравнениями

$$x^\alpha = 0,\, x^m + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m x^{\tilde{a}} = 0,\, x^p - \nu_a^p x^a = 0,$$

$$x^0 - \frac{1}{\mathcal{Z}} (\mathcal{Z}_{\tilde{a}m}^m + \mathcal{Z}_{\tilde{a}\tilde{\sigma}}^m B_m^{\tilde{\sigma}}) x^{\tilde{a}} = 0,$$

где

$$\mathcal{Z} = 1 + \mathcal{Z}_{\tilde{a}}^m B_m^{\tilde{a}}.$$

Плоскость $\tilde{\mathcal{Z}}_{s-2}(A_0)$ (27) будет характеристикой Z-плоскости при смещении по кривым (28) тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{Z}_m^{\tilde{b}} = \mathcal{Z}_m^{\tilde{a}\tilde{b}} (\mathcal{Z} \beta_{\tilde{a}}^0 - \mathcal{Z}_{\tilde{a}m}^m),$$

где $\{\mathcal{Z}_m^{\tilde{a}\tilde{b}}\}$ — обратный фундаментальный объект для объекта $\{\mathcal{Z}_{\tilde{a}\tilde{b}}^m\}$, удовлетворяющий равенствам

$$\mathcal{Z}_m^{\tilde{a}\tilde{c}} \mathcal{Z}_{\tilde{c}\tilde{b}}^m = \delta_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}.$$

3. Введем в рассмотрение объект $\{\psi_c^a\}$, компоненты которого определим соотношениями

$$\begin{cases} \psi_b^a \psi_c^b = \delta_c^a - \dfrac{1}{\mathcal{Z}} B_m^a \mathcal{Z}_c^m,\, \psi_b^a B_c^b = 0, \\ \psi_b^c \mathcal{Z}_c^m = 0,\, \mathcal{Z}_a^m B_m^a = \mathcal{Z},\, \mathrm{rang} \left\| \psi_c^a \right\| = s - 1. \end{cases} \tag{29}$$

Из соотношений (29) следует, что объект $\{\psi_c^a\}$ задает на распределении L-плоскостей почти контактную структуру $(\mathcal{Z}, p)$ гиперболического типа. Построения этого параграфа дают следующую характеристику почти контактной структуры $(\mathcal{Z}, p)$.

Теорема 9. *Касательное L-подрасслоение несет почти контактную структуру* $(\mathcal{Z}, p)$, *определенную* $\mathcal{Z}$-*подрасслоением и* p-*подрасслоением, каждой прямой* $p(A_0)$ *которого соответствует в проективитете Бомпьяни — Пантази плоскость* $\tilde{\mathcal{Z}}_{s-2}(A_0)$ (27) — *пересечение оси* $\mathcal{C}_{m-2}(A_0)$ *пучка* (φ, w) *нормалей 2-го рода гиперполосы* $H_{m,r}$ *с оснащающей Z-плоскостью.*

Из этой теоремы и замечания п. 3 вытекает

Теорема 10. *Регулярная гиперполоса* $H_{m,r}$ *индуцирует (порождает) на касательном L-подрасслоении три однопараметрических семейства почти контактных структур, ассоциированных соответственно с плоскостями пучков* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Список литературы

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

2. *Волкова С.Ю.* Плоскости Нордена — Тимофеева регулярной касательно r-оснащенной гиперполосы проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2009. Вып. 40. С. 28—38.

3. *Legrand G.* T-structures homogenes // C. r. Acad. Sci. 1964. Vol. 258, № 19. P. 4648—4650.

4. *Широков А.П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1974. Т. 11. С. 153—207.

5. *Норден А.П.* Теория композиций // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. 1978. Т. 10. С. 117—145.

6. *Домбровский Р.Ф.* О неголономных композициях на поверхности $M_{m,r}$ в P_n // 150 лет геометрии Лобачевского : тез. докл. Всесоюзной научной конф. по неевклидовой геометрии. Казань, 1976. С. 69.

7. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос : учеб. пособ. Калининград, 1983.

8. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* (f, ξ, η, ρ)-структуры на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. 1975. Т. 7. С. 5—22.

9. *Остиану Н.М.* Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях // Там же. 1977. Т. 8. С. 89—111.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the author

Dr Juriy Popov, prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru