3. *Остиану М.Н., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. сем. ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

4. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2001.

S. Kuzybaeva, Yu. Popov

Affine connections on hypersuface Ω_{n-1}^{1}

Inner affine and normal linear connections is given on a hypersurface $\Omega_{\mathrm{n}-1}^{1}$.

УДК 514.75

А.В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
arturkuleshov@yandex.ru

Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка

Проективная структура Г.Ф. Лаптева построена как фактор-расслоение расслоения реперов второго порядка над гладким многообразием.

Ключевые слова: струя, дифференциальная группа, расслоение реперов, фактор-расслоение, центропроективная группа.

1. Постановка задачи

Г.Ф. Лаптев в работе [4] описал две последовательности главных расслоений, возникающих на произвольном дифференцируемом многообразии M_n :

$$M_n^1,\ M_n^2, ..., M_n^p, ...;\ P_n^1,\ P_n^2, ..., P_n^p, ...$$

Эти расслоения названы продолженными многообразиями и проективными структурами соответственно. Структурными группами этих расслоений служат дифференциальные и проективно-дифференциальные группы: D_n^p, PD_n^p, $p = 1, 2, ...$ Из дифференциальной группы 2-го порядка D_n^2 выделяются две фактор-группы: дифференциальная группа 1-го порядка D_n^1 и проективно-дифференциальная группа 1-го порядка PD_n^1. Группа $D_n^1 = GL(n)$ является полной линейной группой, а группа $PD_n^1 = GP^*(n)$ — центропроективной группой.

Представляет интерес описание предложенной им конструкции на языке теории струй Ш. Эресмана. Для дифференциальных групп и продолженных многообразий такое описание известно (см. работы Ш. Кобаяси [3] и Л. Е. Евтушика [2]). Задача настоящей работы заключается в том, чтобы в явном виде описать построение проективной структуры Г. Ф. Лаптева путем факторизации расслоения реперов второго порядка.

2. Предварительные сведения из теории групп Ли

Пусть G_r — r-параметрическая группа Ли. Тогда справедливы следующие утверждения (подробнее об этом см.: [1]):

Утверждение 1. *Пусть $U \subset R^n$ — пространство параметров r-членной группы Ли G_r, групповая операция в которой выражается функциями $\tilde{u}^\alpha = \mu^\alpha(s^\beta, u^\gamma)$, $\alpha, \beta ... = \overline{1, r}$. Тогда формы*

$$\omega^\alpha(u, du) = \chi^\alpha_\beta(u) du^\beta,$$

где матрица $(\chi^\alpha_\beta(s))$ является обратной для матрицы

$$\left.\left(\frac{\partial \mu^\alpha(u,s)}{\partial u^\beta}\right)\right|_{u=e},$$

инвариантны относительно левых сдвигов на группе G_r:

$$\omega^\alpha(u, du) = \omega^\alpha(\tilde{u}, d\tilde{u}).$$

Утверждение 2. *Внешние дифференциалы левоинвариантных форм* $\omega^{\alpha}(u, du)$ *группы Ли* G_r *имеют вид*

$$d\omega^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}, \tag{1}$$

где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *— константы.*

Замечание. Уравнения (1) называются структурными уравнениями группы G_r, формы $\omega^{\alpha}(u, du)$ — ее структурными формами, а $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — ее структурными константами.

Утверждение 3. *Подмножество* $H \subset G_r$, *содержащее единицу группы* G_r, *является подгруппой в* G_r *тогда и только тогда, когда оно выступает интегральным многообразием некоторой вполне интегрируемой системы Пфаффа, составленной из структурных форм* ω^{α} *группы* G_r *с постоянными коэффициентами*

$$\theta^{i} \equiv h^{i}_{\alpha}\omega^{\alpha} = 0,\ h^{i}_{\alpha} - const\ \ (i = \overline{1,s},\ s = r - \dim H). \tag{2}$$

Замечание. Говорят, что система (2) выделяет подгруппу H.

Утверждение 4. *Для того чтобы система (2) выделяла нормальный делитель, необходимо и достаточно, чтобы внешние дифференциалы форм* θ^{i} *выражались лишь через сами эти формы:*

$$d\theta^{i} = \gamma^{i}_{jk}\theta^{j} \wedge \theta^{k}. \tag{3}$$

Замечание. При этом уравнения (3) — структурные уравнения фактор-группы G_r/H, а γ^{i}_{jk} — ее структурные константы.

3. Описание дифференциальных групп на языке струй

Пусть X и Y — гладкие многообразия. Говорят, что гладкие отображения $f, g : X \to Y$ p-эквивалентны в точке $x \in X$, если $f(x) = g(x)$ и в этой точке они имеют одинаковые частные производные до порядка p включительно. Легко проверить, что данное определение инвариантно относительно выбора локальных координат как в X, так и в Y, а потому оно определяет некоторый геометрический объект — струю отображения. А именно, струя порядка p (или p-струя), задаваемая отображением f, является классом эквивалентности отображений по вышеуказанному отношению и обозначается $j_x^p f$.

Дифференциальная группа p-го порядка D_n^p образована множеством p-струй в точке $0 \in R^n$ всевозможных диффеоморфизмов окрестностей этой точки, оставляющих ее неподвижной. Тогда D_n^p есть группа с умножением, определяемым композицией струй:

$$j_0^p(g) \circ j_0^p(h) \overset{def}{=} j_0^p(g \circ h).$$

Нейтральный элемент этой группы является струей тождественного отображения. Обратный элемент к $j_0^p(g)$ есть p-струя диффеоморфизма, обратного к g.

Утверждение 5. *Группы D_n^1 и $GL(n)$ изоморфны.*

Пусть $\{\varepsilon_i\}$ — стандартный базис в R^n, а $x = x^i \varepsilon_i \mapsto$ $\mapsto (x^1, ..., x^n)$ — стандартная система координат в R^n. Каждому элементу u группы D_n^2 отвечает единственное отображение $f: R^n \to R^n$ вида

$$f(x) = \left(u_j^i x^j + \frac{1}{2} u_{jk}^i x^j x^k \right) \varepsilon_i, \tag{4}$$

такое, что $u = j_0^2(f)$. Наборы $(u_j^i; u_{jk}^i)$ определяют глобальную карту на D_n^2. Отождествляя 2-струю и ее координаты, мы будем рассматривать группу D_n^2 как множество наборов

$$D_n^2 = \{(u_j^i; u_{jk}^i): \ \det(u_j^i) \neq 0, \ u_{jk}^i = u_{kj}^i\}$$

с операцией умножения, вытекающей из определения 2-струи и композиции струй

$$(s_j^i; s_{jk}^i)(u_j^i; u_{jk}^i) = (\tilde{u}_j^i; \tilde{u}_{jk}^i); \tag{5}$$

$$\tilde{u}_j^i = s_p^i u_j^p, \quad \tilde{u}_{jk}^i = s_p^i u_{jk}^p + s_{qr}^i u_j^q u_k^r. \tag{6}$$

Единица группы D_n^2 относительно умножения (6) имеет вид $e=(\delta^i_j;0)$, а инверсия (взятие обратного элемента) задается формулой

$$(s^i_j;\, s^i_{jk}) \mapsto (\overset{*}{s}{}^i_j;\; -s^r_{pq}\,\overset{*}{s}{}^i_r\,\overset{*}{s}{}^p_j\,\overset{*}{s}{}^q_k)\,, \tag{7}$$

где $\overset{*}{s}{}^i_j$ — элементы матрицы, обратной к s^i_j.

Замечание. Группу D_n^2 можно представить в матричном виде [5]. А именно каждому ее элементу $(u^i_j;u^i_{jk})$ сопоставим матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} u^i_j & u^i_{jm} \\ \hline 0 & u^i_j u^k_m \end{array}\right),$$

где пары индексов (i,k) нумеруют ее строки, а пары (j,m) — столбцы. Тогда умножение (5), (6) в группе D_n^2 представляется в виде обычного умножения матриц.

4. Нахождение инвариантных форм и структурных уравнений дифференциальной группы 2-го порядка

Найдем левоинвариантные формы и выведем структурные уравнения группы D_n^2. Рассмотрим голономные кобазисы к группе D_n^2 в точках u и $\tilde{u}$:

$$\{du^i_j,\;\; du^i_{jk}\},\;\; \{d\tilde{u}^i_j,\;\; d\tilde{u}^i_{jk}\},\;\;\; j\le k\ .$$

Формулы (6) при фиксированных координатах $(s^i_j;s^i_{jk})$ элемента s представляют собой координатные выражения левого сдвига L_S на этот элемент. Тогда дифференциал отображения L_S выражаются формулами

$$d\tilde{u}^i_j = s^i_k du^k_j\,,\;\; d\tilde{u}^i_{pq} = s^i_j du^j_{pq} + s^i_{jk}\left(du^j_p u^k_q + u^j_p du^k_q\right). \tag{8}$$

В силу Утверждения 1 получаем:

Утверждение 6. *Формы*

$$\vartheta^i_j(u,du)=\overset{*}{u}{}^i_k\,du^k_j\,,\ \vartheta^i_{jk}(u,du)=\overset{*}{u}{}^i_p\left(du^p_{jk}-u^p_{km}\vartheta^m_j-u^p_{jm}\vartheta^m_k\right) \tag{9}$$

являются левоинвариантными формами группы D^2_n.

Дифференцируя (9) внешним образом, получим структурные уравнения на эти формы:

$$d\vartheta^i_j=\vartheta^k_j\wedge\vartheta^i_k\,, \tag{10}$$

$$d\vartheta^i_{jk}=\vartheta^m_{jk}\wedge\vartheta^i_m-\vartheta^i_{jm}\wedge\vartheta^m_k-\vartheta^i_{mk}\wedge\vartheta^m_j\,. \tag{11}$$

Замечание. Уравнения (10), (11) совпадают со структурными уравнениями дифференциальной группы 2-го порядка в работе Г. Ф. Лаптева [4], однако выражения для форм ϑ^i_j, ϑ^i_{jk} имеют несколько иной вид.

5. Выделение центропроективной фактор-группы

Рассмотрим формы

$$\vartheta_i=\vartheta^k_{ik}\,. \tag{12}$$

Структурные уравнения на них получаются свертыванием уравнений (11) по верхнему и нижнему индексам и имеют вид

$$d\vartheta_i=\vartheta^k_i\wedge\vartheta_k\,. \tag{13}$$

Из (10), (13) в силу Утверждения 4 следует, что равенства

$$\vartheta^i_j=0\,,\ \vartheta_i=0 \tag{14}$$

представляют собой уравнения некоторого нормального делителя K группы D^2_n. Подставляя (9) и (12) в (14), получим систему n^2+n линейных однородных уравнений с $n^2+\frac{1}{2}n^2(n+1)$ неизвестными du^k_i, du^k_{ij}, содержащую $n+1$ подсистему

$$\overset{*}{u}{}^i_k\,du^k_1=0\,,\ldots,\ \overset{*}{u}{}^i_k\,du^k_n=0\,,\ \overset{*}{u}{}^k_p\,du^p_{ik}=0\,, \tag{15}$$

матрица коэффициентов $\overset{*}{u}{}^i_k$ каждой из которых является невырожденной. Из первых n подсистем получим $du^k_j = 0$. Таким образом, координаты u^i_j — первые интегралы этих подсистем, а значит, и всей системы (15). Итак, для элементов группы имеем $u^i_j = const$. При этом группа K должна содержать единичный элемент $e = (\delta^i_j; 0)$. Значит, для любого элемента группы первые n^2 координат имеют вид

$$u^i_j = \delta^i_j \, . \tag{16}$$

Подставляя их в (n + 1)-ю подсистему системы (15), получим $du^k_{ik} = 0$. Таким образом, величины u^k_{ik} также являются первыми интегралами системы (14), т. е. для элементов группы имеем $u^k_{ik} = const$. Тогда в силу $e = (\delta^i_j; 0) \in K$ для элементов данной группы выполняются равенства

$$u^k_{ik} = 0 \, . \tag{17}$$

Таким образом, получаем

Утверждение 7. *Подгруппа K группы D^2_n, выделяемая уравнениями (14), является ее нормальным делителем и состоит из элементов вида $(\delta^i_j; u^i_{jk})$, где u^i_{jk} — произвольные числа, симметричные по нижним индексам и удовлетворяющие условию (17):*

$$K = \{(\delta^i_j; u^i_{jk}) : \; u^i_{jk} = u^i_{kj}, \; u^k_{jk} = 0\} \, .$$

Группа K имеет левоинвариантные формы ϑ^i_{jk}, однако в силу второй серии уравнений (14) не все из этих форм линейно независимы. Из выражения (11) получим структурные уравнения этой группы: $d\vartheta^i_{jk} = 0$, т. е. группа K — абелева.

Умножение в группе получается из общей формулы (5) подстановкой в нее (16).

Утверждение 8. *Умножение в группе* K *имеет вид*

$$(\delta^i_j; s^i_{jk})(\delta^i_j; u^i_{jk}) = (\delta^i_j; u^i_{jk} + s^i_{jk}) . \qquad (18)$$

Элемент, обратный к элементу $(\delta^i_j; u^i_{jk})$, равен $(\delta^i_j; \ -u^i_{jk})$.

Поскольку K — нормальный делитель, определена фактор-группа D^2_n / K со структурными формами ϑ^i_j, ϑ_i и структурными уравнениями (10), (13). Правые классы смежности определяются отношением эквивалентности между элементами $(s^i_j; s^i_{jk})$ и $(u^i_j; u^i_{jk})$ группы D^2_n, задаваемым условием

$$(s^i_j; s^i_{jk})(u^i_j; u^i_{jk})^{-1} \in K ,$$

которое с учетом (7), (16) и (17) принимает вид

$$s^i_j = u^i_j , \ (s^k_{jq} - u^k_{jq}) \overset{*}{s}{}^q_k = 0 . \qquad (19)$$

Элементами фактор-группы D^2_n / K являются правые классы смежности, которые с учетом (19) имеют вид

$$[(u^i_j; u^i_{jk})] = K(u^i_j; u^i_{jk}) = \{(u^i_j; s^i_{jk}) : \ s^i_{jk} = s^i_{kj} , \ (s^k_{jq} - u^k_{jq}) \overset{*}{u}{}^q_k = 0\} .$$

Замечание. Левые классы смежности $(u^i_j; u^i_{jk})K$ определяются тем же самым отношением эквивалентности, что следует из того, что подгруппа K — нормальный делитель группы D^2_n.

Равенства (19) можно переписать в виде

$$s^i_j = u^i_j , \ s^k_{jm} \overset{*}{s}{}^m_k = u^k_{jm} \overset{*}{u}{}^m_k , \qquad (20)$$

откуда видно, что в качестве координат элементов фактор-группы можно принять величины u^i_j, u_j, где

$$u_j = u^k_{jm} \overset{*}{u}{}^m_k . \qquad (21)$$

Тогда положим $[(u^i_j; u^i_{jk})] = (u^i_j; u_j)$. Таким образом, получаем

Утверждение 9. *Фактор-группа* D^2_n / K *образована классами смежности, которые имеют вид*

$$(u^i_j; u_j) = \{(u^i_j; u^i_{jk}) : \ u^k_{jm} \overset{*}{u}{}^m_k = u_j\} .$$

Утверждение 10. *Умножение в фактор-группе* D_n^2 / K *определяется формулой*

$$(s_j^i; s_j)(u_j^i; u_j) = (s_k^i u_j^k; u_j + s_k u_j^k). \tag{22}$$

Следствие. *В фактор-группе* D_n^2 / K: *1) единичный элемент имеет вид* $e = (\delta_j^i; 0)$; *2) для любого элемента* $(s_j^i; s_j)$ *фактор-группы* $G^2(n)/K$ *обратный к нему элемент имеет вид* $(\overset{*}{s}{}_j^i; -s_k s_j^k)$.

Замечание 1. Фактор-группу D_n^2 / K можно представить в матричном виде [5]. А именно каждому ее элементу $(u_j^i; u_j)$ сопоставим матрицу порядка $(n+1)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} u_j^i & 0 \\ \hline u_j & 1 \end{array}\right).$$

Тогда умножение (22) в этой группе представляется в виде обычного умножения матриц.

Замечание 2. Подставляя (12) в (9), получим

$$\vartheta_i = du_i - u_k \vartheta_i^k. \tag{23}$$

6. Изоморфизм групп D_n^2 / K и $GP^*(n)$

Рассмотрим проективное пространство P_n, точки которого определяются однородными координатами $(x^0 : x^1 : ... : x^n)$. Обозначим через $GP^*(n)$ центропроективную группу, действующую в P_n и оставляющую начало координат $(1 : 0 : ... : 0)$ неподвижным.

Каждому элементу $s = (s_j^i, s_i) \in D_n^2 / K$ поставим в соответствие центропроективное преобразование f_s пространства P_n, действующее по закону

$$\rho y^0 = x^0 + s_i x^i, \ \rho y^i = s_j^i x^j, \ \rho \neq 0. \tag{24}$$

Утверждение 11. *Отображение* $\phi: s \to f_s$ *является изоморфизмом групп* D_n^2 / K *и* $GP^*(n)$.

Таким образом реализована конструкция центропроективной группы как фактор-группы дифференциальной группы 2-го порядка.

7. Расслоение $G(M)$

Моделями продолженных многообразий Г. Ф. Лаптева стали расслоения реперов высших порядков.

Пусть M есть дифференцируемое многообразие размерности n ($n \in N$). Репером p-го порядка r_x^p в точке $x \in M$ называется p-струя $j_0^p(f)$ некоторого диффеоморфизма $f:(R^n, 0) \to (M, x)$, где $(R^n, 0)$ и (M, x) — некоторые окрестности точек 0 и x соответственно (подробнее о реперах см.: [2; 3]).

Замечание. Репер r_0^1 первого порядка можно отождествить с базисом касательного пространства $T_x M$ следующим образом. Через t_i обозначим стандартное вложение i-й координатной оси в R^n:

$$t_i : R \to R^n : x \mapsto (0, ..., 0, \underbrace{x}_{i}, 0, ..., 0).$$

Тогда 1-струи $e_i = r_0^1 \circ j_0^1(t_i)$ образуют векторный базис $\{e_i\}$ пространства $T_x M$, отождествляемый с r_0^1.

Многообразие $P^p(M)$ всех p-реперов наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией $\pi_p : P^p(M) \to M$, где $\pi_p(r_x^p) = x$, и правым действием группы D_n^p, определенным при помощи композиции p-струй:

$$R_s : r_x^p \mapsto r_x^p \circ s,$$

где $s \in D_n^p$. Конструкция атласа на расслоении $P^p(M)$ получается следующим образом. Пусть (U, φ) — некоторая карта на *M*. Тогда для каждого репера $r_x^p \in \pi^{-1}(U)$ набор его координат имеет вид $(x^i; x^i_j; x^i_{jk}; ...; x^i_{j_1 \dots j_p})$, где

$$x^i = f^i(0),\ x^i_j = \partial_j f^i(0),\ \dots,\ x^i_{j_1\dots j_p} = \partial_{j_1\dots j_p} f^i(0)\,, \tag{25}$$

причем (f^i) — координатное представление всякого диффеоморфизма $f \in r_x^p$ в карте (U, φ). Пусть теперь (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ — две карты в окрестности точки x, причем $\psi = (\psi^i)$ — отображение перехода между ними: $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$. Тогда формулы преобразования координат репера r_x^p 3-го порядка имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{x}^i = \psi^i(x^j),\quad \tilde{x}^i_j = \psi^i_k x^k_j,\quad \tilde{x}^i_{jk} = \psi^i_s x^s_{jk} + \psi^i_{st} x^s_j x^t_k,\\ \tilde{x}^i_{jkm} = \psi^i_{spq} x^s_j x^p_k x^q_m + \psi^i_{ps} x^p_j x^s_{km} + \psi^i_{ps} x^p_k x^s_{jm} + \psi^i_{ps} x^p_m x^s_{jk} + \psi^i_s x^s_{jkm},\end{gathered} \tag{26}$$

$$\psi^i_k = \partial_k \psi^i(x^k),\quad \psi^i_{j_1\dots j_p} = \partial_{j_1\dots j_p}\psi^i(x^s)\,.$$

Пусть $r_x^2 K$ — орбита репера r_x^2 под действием нормального делителя *K*:

$$r_x^2 K = \{r_x^2 \circ s :\ s \in K\}\,.$$

Эту орбиту мы также будем называть фактор-репером, соответствующим реперу r_x^2. Тогда на многообразии фактор-реперов

$$G(M) \overset{def}{=} P^2(M)/K = \{r_x^2 K :\ r_x^2 \in P^2(M),\, x \in M\}$$

определено правое действие группы $D_n^2 / K \cong GP^*(n)$ по правилу

$$(r_x^2 K)(sK) = (r_x^2 \circ s)K,\quad r_x^2 \in P^2(M),\quad s \in K\,. \tag{27}$$

Относительно такого действия многообразие $G(M)$ разбивается на орбиты вида

$$G_x = \{r_x^2 K :\ r_x^2 \in \pi^{-1}(x)\},\quad x \in M\,.$$

Утверждение 12. *Многообразие* $G(M)$ *наделено структурой главного расслоения над базой M* с *канонической проекцией* $\underline{\pi}: G(M) \to M$ *, где* $\underline{\pi}(r_x^p K) = x$*, действие структурной группы* $D_n^2 \big/ K \cong GP^*(n)$ *определено по правилу* (25).

Конструкция атласа на расслоении $G(M)$ получается следующим образом. Пусть (U, φ) — некоторая карта на *M*. Тогда для каждого фактор-репера $\xi K \in \underline{\pi}^{-1}(U)$ набор его координат имеет вид $(x^i; x_j^i; x_i)$, где x^i, x_j^i определены по формулам (25),

$$x_i = x_{ik}^s \overset{*}{x_s^k}, \tag{28}$$

причем в силу выражения (26) формулы преобразования координат фактор-репера ξK при переходе между картами (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ имеют вид

$$\tilde{x}_i = x_i + \psi_{jk}^s \overset{*}{\psi_s^k} x_i^j . \tag{29}$$

8. Структурные формы расслоений $P^3(M)$ и $G(M)$

Найдем полные дифференциалы $d\tilde{x}^i$, $d\tilde{x}_j^i$, $d\tilde{x}_{jk}^i$ функций (26) относительно переменных x^i, x_j^i, x_{jk}^i, принимая во внимание, что $\psi_{j_1 \dots j_p}^i$ — функции координат x^i:

$$d\tilde{x}^i = \psi_k^i dx^k, \; d\tilde{x}_j^i = \psi_{km}^i x_j^k dx^m + \psi_k^i dx_j^k, \tag{30}$$

$$d\tilde{x}_{jk}^i = (\psi_{ms}^i x_{jk}^m + \psi_{stu}^i x_j^t x_k^u) dx^s + \psi_{st}^i (x_k^t \delta_j^u + x_j^t \delta_k^u) dx_u^s + \psi_m^i dx_{jk}^m .$$

Из выражений (26) и (30) вытекает

Утверждение 13. *Формы* ω^i, ω_j^i, ω_{jk}^i, определенные на $P^3(M)$ *следующим образом:*

$$dx^i = x_k^i \omega^k, \; dx_j^i = x_{jk}^i \omega^k + x_k^i \omega_j^k, \tag{31}$$

$$dx^i_{jk} = x^i_{jkm}\omega^m + x^i_{jm}\omega^m_k + x^i_{km}\omega^m_j + x^i_m\omega^m_{jk}$$

являются инвариантными относительно преобразований вида (26), т. е.

$$\omega^i(x, dx) = \omega^i(\tilde{x}, d\tilde{x}),\ \omega^i_j(x, dx) = \omega^i_j(\tilde{x}, d\tilde{x}),\ \omega^i_{jk}(x, dx) = \omega^i_{jk}(\tilde{x}, d\tilde{x}).$$

Утверждение 14. *Структурные уравнения на формы* ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk} *имеют вид*

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{32}$$

$$d\omega^i_{jk} = \omega^m_{jk} \wedge \omega^i_m + \omega^m_k \wedge \omega^i_{jm} + \omega^m_j \wedge \omega^i_{km} + \omega^m \wedge \omega^i_{jkm}. \tag{33}$$

Замечание. Формы ω^i_{jkm} строятся аналогично, подробнее см.: [2].

Замечание. Из уравнений (28) и (31) вытекает формула

$$dx_i = \omega^k_{ik} + x_j\omega^j_i + x_{ij}\omega^j,$$

где

$$x_{ip} = x^m_{ikp}\overset{*}{x}{}^k_m - x^m_{ik}\overset{*}{x}{}^k_s\overset{*}{x}{}^q_m x^s_{qp}.$$

Утверждение 15. *Формы* $\omega_i \overset{def}{=} \omega^k_{ik}$ *являются инвариантными относительно преобразований вида (26), (29) т. е.*

$$\omega_i(x, dx) = \omega_i(\tilde{x}, d\tilde{x}).$$

Структурные уравнения на них имеют вид

$$d\omega_i = \omega^k_i \wedge \omega_k + \omega^k \wedge \omega_{ik},\quad \omega_{jk} = \omega^m_{jkm}. \tag{34}$$

Сопоставляя (32) — (34) с [4] и [6], получаем

Утверждение 16. *Главное расслоение* $G(M)$ *совпадает с проективной структурой Г. Ф. Лаптева* P^1_n [4] *и с расслоением центропроективных реперов* [6].

Список литературы

1. *Васильева М. В.* Структура групп Ли. М., 1969.

2. *Евтушик Л. Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Труды геометрического семинара. М. : ВИНИТИ, 1963. Т. 2. С. 119—150.

3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М. : ВИНИТИ, 1966. Т. 1. С.139—189.

5. *Лумисте Ю. Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения *p*-кореперов // Труды геометрического семинара. М. : ВИНИТИ, 1974. Т. 5. С. 239—257.

6. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

A. Kuleshov

Center-projective frames as equivalence classes of the second order frames

The Laptev's projective structure is constructed as a quotient bundle of the second order frame bundle over a smooth manifold.

УДК 514.75

В. С. Малаховский, Е. П. Юрова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
yurova_e@mail.ru

Тензорные поля на *m*-мерном многообразии гиперэллипсоидов в *n*-мерном аффинном пространстве

В n-мерном аффинном пространстве A_n исследуется m-параметрические семейства V_m (n – 1)-мерных невырожденных центральных нелинейчатых гиперквадрик (гиперэллипсоидов) Q. Найдены тензорные поля и определяемые ими инвариантные семейства различных геометрических образов (точек,