subconnection with the subobject Γ^{i}_{jk} is generated by a field of a metric tensor and the object of a torsion. The subobject Γ^{i}_{ja} is enveloped by a field of a metric tensor only in the adapted frame. The basic distinction of concepts of the generalized connection of Levi-Chivita and the induced connection is established.

УДК 514.76

В.И. Паньженский
(Пензенский государственный педагогический университет)

О ДВИЖЕНИЯХ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

На касательном расслоении обобщенного финслерова пространства естественным образом определены две римановых метрики: метрика главной диагонали и метрика второй диагонали. В случае, когда обобщенное финслерово пространство сводится к риманову, эти метрики совпадают с метрикой Сасаки и метрикой полного лифта соответственно. Доказано, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений, сохраняющих слои, не превосходит $n(n+1)$ – в случае метрики главной диагонали и $3n(n+1)/2$ – в случае метрики второй диагонали, где n – размерность базисного многообразия. Если движения состоят из продолженных преобразований базисного многообразия, то размерность алгебры не превосходит $n(n+1)/2$. Указаны все римановы метрики, для которых алгебра Ли инфинитезимальных движений имеет размерность $n(n+1)/2$.

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, TM – касательное расслоение над M, (x^i) – локальные координаты на M, $(x^A) = (x^i, x^{n+i} = y^i)$ – естественные локальные координаты на

TM, $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ – дважды ковариантное симметрическое невырожденное тензорное поле, компоненты которого $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$ являются функциями на *TM*, однородными нулевой степени по координатам касательного вектора $y \in T_x M$. Тензор g определяет на *M* обобщенную финслерову метрику, и мы имеем обобщенное финслерово пространство $\mathrm{F}^n = (M, g)$. Если на *TM* существует функция *F* такая, что $g_{ij} = F_{\cdot i \cdot j}$ $(F_{\cdot i} = \partial F / \partial y^i)$, то пространство F^n является финслеровым. Связность Картана регулярного обобщенного финслерова пространства индуцирует нелинейную связность, горизонтальные площадки которой содержат векторы $\delta_i = \partial_i - \Gamma^{*k}_{ip} y^p \partial_{n+k}$, аннулирующие 1-формы $\delta y^k = dy^k + \Gamma^{*k}_{ip} y^p dx^i$, где Γ^{*k}_{ij} – коэффициенты связности. Векторы $\delta_A = (\partial_i, \partial_{n+k})$ образуют базис, адаптированный к канонической структуре почти произведения на *TM*, а 1-формы $\delta x^A = (dx^i, \delta y^i)$ составляют дуальный ему базис.

Рассмотрим на *TM* римановы метрики:

$$G_1 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j$$

$$\text{и } G_2 = g_{ij} dx^i \otimes \delta y^j + g_{ij} \delta y^i \otimes dx^j . \qquad (1)$$

Векторное поле *X* на *TM* является инфинитезимальным движением риманова пространства (*TM*, *G*), если производная Ли от метрического тензора *G* вдоль *X* равна нулю: $\mathrm{L}_X G = 0$. Если $X = \xi^A \delta_A$, $G = G_{AB} \delta x^A \otimes \delta x^B$, то уравнения движений примут вид^

$$\xi^C \left(\delta_C G_{AB} + G_{PB} \Omega^P_{AC} + G_{AP} \Omega^P_{BC}\right) + \delta_A \xi^P G_{PB} + \delta_B \xi^P G_{AP} = 0 , \qquad (2)$$

где Ω^C_{AB} – объект неголономности репера $\left\{x^A, \delta_A\right\}$: $[\delta_A, \delta_B] = \Omega^C_{AB} \delta_C$. Рассмотрим движения на (*TM*, *G*), сохраняющие слои. Тогда, как известно [1], векторное поле инфинитезимального движения должно быть проектируемым на базу и, следовательно, $X = \xi^i(x) \delta_i + \xi^{n+i}(x, y) \dot{\partial}_i$. Имеет место [2; 3]

Теорема. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений, сохраняющих слои, не превосходит* $n(n+1)$ *в случае метрики главной диагонали* G_1 *и* $3n(n+1)/2$ *в случае метрики второй диагонали* G_2.

Доказательство. Пусть ∇ вполне приводимая линейная связность на *TM*: $\nabla_{\delta_A}\delta_B = \Gamma^C_{AB}\delta_C$ с ненулевыми компонентами $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^{n+k}_{in+j} = \Gamma^{*k}_{ij}$. Нетрудно убедиться, что $\nabla G_1 = 0$ и $\nabla G_2 = 0$, т. е. связность согласована как с метрикой главной диагонали, так и с метрикой второй диагонали, а любое инфинитезимальное движение сохраняет связность ∇, т.е. из $\mathrm{L}_X G_{AB} = 0$ следует $\mathrm{L}_X \Gamma^C_{AB} = 0$. Уравнения движений (2) можно представить в следующем виде:

$$\xi^C\left(\nabla_C G_{AB} - G_{PB}S^P_{AC} - G_{AP}S^P_{BC}\right) + \nabla_A\xi^P G_{PB} + \nabla_B\xi^P G_{AP} = 0\,, \tag{3}$$

где S^C_{AB} – компоненты тензора кручения S связности ∇. Наряду с неизвестными функциями $\xi^A = (\xi^i, \xi^{n+i})$ – компонентами инфинитезимального движения – введем следующие функции:

$$\xi^A_B = \nabla_B\xi^A - \xi^P S^A_{BP}\,. \tag{4}$$

Тогда уравнения (3) примут вид:

$$\xi_{AB} + \xi_{BA} = 0\,, \tag{5}$$

где $\xi_{AB} = G_{AP}\xi^P_B$. Учитывая, что векторное поле X проектируемо на базу, из (4) следует, что $\xi^i_{n+j} = 0$. Пусть теперь $G = G_1$, тогда уравнения (5) для различных серий индексов будут выглядеть так:

$$g_{pi}\xi^p_j + g_{jp}\xi^p_i = 0\,,\ g_{pi}\xi^p_{n+j} + g_{jp}\xi^{n+p}_i = 0\,,$$

$$g_{pi}\xi^{n+p}_j + g_{jp}\xi^p_{n+i} = 0\,,\ g_{pi}\xi^{n+p}_{n+j} + g_{jp}\xi^{n+p}_{n+i} = 0\,. \tag{6}$$

Из этих уравнений следует, что и $\xi_j^{n+i} = 0$, а на ξ_j^i, ξ_{n+j}^{n+i} накладывается $n^2 + n$ независимых связей. Если $G = G_2$, то уравнения (5) примут вид:

$$g_{pj}\xi_i^{n+p} + g_{ip}\xi_i^{n+p} = 0,\ g_{pj}\xi_i^p + g_{ip}\xi_{n+j}^{n+p} = 0,$$

$$g_{pj}\xi_{n+i}^{n+p} + g_{ip}\xi_j^p = 0,\ g_{pj}\xi_{n+i}^p + g_{ip}\xi_{n+j}^p = 0. \qquad (7)$$

Эти уравнения накладывают на компоненты ξ_j^i, ξ_j^{n+i}, ξ_{n+j}^{n+i} $n^2 + n(n+1)/2$ алгебраических условий.

Уравнения $\mathrm{L}_X \Gamma_{AB}^C = 0$ являются дифференциальными следствиями уравнений (5). Их можно представить в каноническом виде [1]:

$$\nabla_A \xi_B^C + \xi^K R_{ABK}^C = 0, \qquad (8)$$

где R_{ABK}^C – компоненты тензора кривизны связности ∇.

Уравнения (8) вместе с уравнениями (4) разрешимы относительно производных от $2n + 4n^2$ неизвестных функций ξ^A, ξ_B^A, на которые накладывается $3n^2 + n$ алгебраических условий в случае метрики G_1 и $2n^2 + n(n+1)/2$ в случае метрики G_2. Поэтому, если условия интегрируемости уравнений (4) и (8) выполняются тождественно, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений максимальна и равна $2n + 4n^2 - 3n^2 - n^2 = n(n+1)$ для метрики G_1 и $2n + 4n^2 - 2n^2 - n(n+1)/2 = 3n(n+1)/2$ для метрики G_2. Теорема доказана.

Если движения состоят из продолженных преобразований базисного многообразия, то они являются инфинитезимальными движениями риманова пространства (TM, G) тогда и только тогда, когда исходное поле на базе является инфинитезимальным движением пространства (M, g). Но размерность группы движений регулярного обобщенного финслерова пространства не превосходит $n(n+1)/2$, а метрический тензор любого максимально подвижного F^n $(n>2)$ имеет вид [4]:

$$g_{ij}(x,y)=\gamma_{ij}(x)+cu_iu_j,$$

где γ_{ij} – компоненты метрического тензора риманова пространства постоянной секционной кривизны, $c=const\neq -1$, $u_i=\gamma_{ik}y^k\Big/\sqrt{\gamma_{ps}y^py^s}$. Таким образом, *максимальная размерность группы движений, состоящей из продолженных преобразований, римановых пространств (TM, G) с диагональными метриками равна* $n(n+1)/2$. *Компоненты метрического тензора, определяющего любое максимально подвижное пространство, имеют указанный выше вид*. Заметим, что если g – риманова метрика, то метрика главной диагонали есть метрика Сасаки, а метрика второй диагонали есть метрика полного лифта.

Список литературы

1. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Тр. геом. сем. КГУ. 1982. Т. 14. С. 97 – 108.

2. *Паньженский В.И.* О движениях в касательном расслоении с метрикой Сасаки / Деп. в ВИНИТИ, №1194-В89. 1989. 10 с.

3. *Паньженский В.И.* О метрике полного лифта в касательном расслоении локально конического пространства / Деп. в ВИНИТИ, №454-В90. 1990. 13 с.

4. *Паньженский В.И.* О группах изометрий метрических пространств линейных элементов / Деп. в ВИНИТИ, №1939-81. 1981. 16 с.

V. Panzhenskiy

ABOUT MOTIONS ON TANGENT BUNDLE OF GENERALIZED FINSLER SPACE

Maximum dimension of algebra Lie of infinitesimal motions preserving fibre on tangent bundle with diagonal metrics is obtained.