и соотношения (3) имеем:

$$\mu^k_\ell \xi^\ell \gamma_{ki} + \xi^k \gamma_{ki} = 0 \tag{9}$$

или

$$\mu^k_\ell \xi^\ell + \xi^k = 0. \tag{10}$$

Таким образом, получаем:

$$\nabla_{\vec{\xi}} \vec{\xi} = -\vec{\xi}. \tag{11}$$

Достаточность. Пусть для градиентного векторного поля имеет место условие (11), которое равносильно (10) или (9). Так как $\vec{\xi}$ градиентное векторное поле, то имеет место условие (8). Тогда из (9) следует $\mu^k_i \xi^\ell \gamma_{k\ell} + \xi^k \gamma_{ki} = 0$, т.е. $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_p$.

III. Рассмотрим другой возможный случай, когда векторное поле $\vec{\xi}$ касается секущей поверхности $\overline{V}_p$, т.е. секущая поверхность $\overline{V}_p$ является фокальной для направления $[x, \vec{\xi}\,]$. В этом случае естественно векторное поле назвать фокальным. Итак, поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда

$$\vec{\xi} = \xi^i \vec{e}_i, \quad \vec{\xi} = t^k \vec{a}_k. \tag{12}$$

Приходим к системе

$$\nabla_{\vec{t}} \vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{t}; \quad \ell^\alpha_{ki} t^k \xi^i = 0. \tag{13}$$

Условия (12) и (13) эквивалентны, поэтому имеет место

Т е о р е м а. Векторное поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда на V_p существует векторное поле $\vec{t}$, сопряженное с направлением поля $\vec{\xi}$, для которого $\nabla_{\vec{t}} \vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{t}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I6 1985

УДК 514.75

Т.П. Ф у н т и к о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные [1] конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов C_1 и C_2, причем эллипсы C_1 и C_2 имеют общую касательную, но не лежат в одной плоскости.

Многообразие (C_1) эллипсов C_1 -одномерное, а многообразие (C_2) эллипсов C_2 -двумерное, таким образом, каждому эллипсу C_1 соответствует однопараметрическое семейство $(C_2)_{C_1}$ эллипсов C_2.

Отнесем конгруэнцию $(C_1C_2)_{1,2}$ к реперу $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина A которого помещена в точку касания эллипсов C_1 и C_2, концы векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1$ совмещены соответственно с центрами O_1 и O_2 эллипсов C_1 и C_2, вектор $\vec{e}_2$ направлен по общей касательной эллипсов и нормирован.

Уравнения эллипсов C_1 и C_2 относительно выбранного репера записываются в виде:

$$C_1: \quad (x^3)^2 - 2x^3 + (x^2)^2 = 0, \quad x^1 = 0;$$

$$C_2: \quad (x^1)^2 - 2x^1 + a^2 (x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = b\omega^1, \quad \omega^3_3 = k\omega^1; \quad \omega^3_2 = c\omega^1 + \omega^2; \quad \omega^2_3 = \ell\omega^1 - \omega^2; \\ &\omega^2_2 = p\omega^1, \quad \omega^1_2 = m\omega^1, \quad \omega^1_3 = n\omega^1, \quad \omega^\alpha_1 = \Gamma^\alpha_{1i}\omega^i, \\ &da = A_i \omega^i, \quad i = 1,2; \quad \alpha = 1,2,3; \quad \lambda = 2,3, \end{aligned} \tag{1}$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (1). Здесь формы

ω^1, ω^2 приняты в качестве базисных.

Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$ существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$ характеризуются следующими свойствами: I/ прямолинейные конгруэнции $(A, \vec{e}_\lambda)$ имеют по одному семейству соответствующих торсов, общая фокальная поверхность прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\lambda)$ является огибающей плоскостей эллипсов C_1; 2/ многообразие $(C_2)_{C_1}$ является фокальным [3]; 3/ точка A является фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1 = 0$.

Т е о р е м а 1. Если точка A является сдвоенной фокальной точкой эллипса C_2, то линия (O_2) центров эллипсов C_2 многообразия $(C_2)_{C_1}$ -плоская; если же при этом характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой AO_2, то линия (O_2) является эллипсом, а точка $\vec{P} = \vec{A} + 2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 + a^2 (x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0, \\ x^1 \omega_1^3 + x^2 \omega_2^3 + \omega^3 = 0, \\ (1 - x^1)(x^1 \omega_1^1 + \omega^1) + (x^2)^2 (a\,da - a^2 \omega_2^2) + x^1 x^2 (-\omega_2^1 - a^2 \omega_1^2) + x^2 (\omega_2^1 - a^2 \omega^2) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

следует, что точка A является сдвоенной фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1 = 0$ при

$$\Gamma_{12}^1 = 0. \tag{3}$$

В этом случае для линии (O_2) имеем:

$$d\vec{O}_2\Big|_{\omega^1=0} = (\Gamma_{12}^2 \vec{e}_2 + \Gamma_{12}^3 \vec{e}_3)\omega^2, \quad d\vec{e}_2\Big|_{\omega^1=0} = \omega^2 \vec{e}_3, \quad d\vec{e}_3\Big|_{\omega^1=0} = -\omega^2 \vec{e}_2,$$

т.е. линия (O_2) -плоская.

Характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой AO_2, когда

$$\Gamma_{12}^3 = 0. \tag{4}$$

В этом случае направление касательной к линии (O_2) опре-

деляется вектором $\vec{e}_2$, т.е. линия (O_2) соответствует линии $\omega^1 = 0$ на поверхности (A), т.е. эллипсу C_1. Кроме того, из системы (2) и условий (3), (4) следует, что точка $\vec{P} = \vec{A} + 2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2. Теорема доказана.

Рассмотрим конгруэнции $(C_1 C_2)_{1,2}$, для которых плоскости эллипсов C_2 являются касательными к поверхности (A), касательные к линии центров эллипсов C_1 параллельны соответствующим плоскостям эллипсов C_2 и линейчатая поверхность $(AO)_{\omega^1=0}$ прямолинейной конгруэнции (AO_2), соответствующая эллипсу C_1, является торсом. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K.

Аналитически конгруэнции K определяются условиями

$$\Gamma_{12}^3 = 0, \quad k = 0, \quad b = 0. \tag{5}$$

Учитывая условия (5) в системе (1), получаем

$$\ell = 0, \quad c = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad p = 0. \tag{6}$$

В силу условий (5) и (6) конгруэнции K существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Для конгруэнций K справедливы следующие свойства: I/ торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ соответствуют; 2/ координатные линии на поверхности (A) сопряжены; 3/ координатные линии $\omega^1 = 0$ (эллипсы C_1) на поверхности (A) являются линиями тени; 4/ все эллипсы многообразия (C_1) образуют каналовую поверхность; 5/ существуют аффинные расслоения [2] от прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ к семействам плоскостей Π_α $(x^\alpha = 0)$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \vec{e}_\alpha)$ определяются одним и тем же уравнением

$$\omega^1 \cdot \omega^2 = 0,$$

значит они соответствуют.

2/ Асимптотические линии на поверхности (A) определяются уравнением

$$\Gamma^3_{11}(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=0, \qquad (7)$$

из которого следует справедливость свойства 2.

3/. Из формулы (7) и равенств

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0}=\omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0}=\Gamma^1_{12}\vec{e}_1\omega^2$$

получаем свойство 3.

4/. Так как

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0}=\omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_2\big|_{\omega^2=0}=m\vec{e}_1\omega^1,$$

$$d\vec{e}_3\big|_{\omega^2=0}=n\vec{e}_1\omega^1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0}=\Gamma^1_{12}\vec{e}_1\omega^2,$$

то инфинитезимальные перемещения всех точек эллипса C_1 при $\omega^2=0$ происходят в одном и том же направлении, определяемом вектором $\vec{e}_1$. Линия центров эллипсов не является прямой, следовательно, все эллипсы C_1 принадлежат каналовой поверхности.

5/. В силу равенств (5), (6) условия

$$\begin{cases}\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta=0, & \alpha,\beta=1,2,3,\ \alpha\neq\beta,\\ \omega^\beta_\alpha\wedge\omega^\alpha_\beta=0,\end{cases}$$

указанных аффинных расслоений тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

2. Ткач Г.П. О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.143-152.

3. Фунтикова Т.П. Одномерные многообразия эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.10, Калининград, 1979, с.131-135.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

В.Н. Худенко

СВЯЗНОСТЬ В ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

В n-мерном проективном пространстве рассматривается связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия. Получена геометрическая характеристика подобъектов и объекта связности.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное k-параметрическое многообразие $(k,k,n)^2_p$ квадрик Q_p. С этим многообразием ассоциируется многообразие B^*_n обобщенных пространственных элементов. Обобщенным пространственным элементом (L_ℓ, L_{p+1}) согласно [3] будем называть проективную плоскость L_{p+1} (p-мерной квадрики Q_p) вместе с инцидентной ей подплоскостью L_ℓ, которая возникает внутренним образом, например, как плоскость, натянутая на соответствующее количество характеристических точек квадрики.

Поместим вершины A_μ репера $R=\{A_1,\dots,A_{n+1}\}$ в плоскость L_ℓ, вершины $A_{\bar a}$ вне плоскости L_ℓ, но в плоскости L_{p+1} и вершины A_a вне плоскости L_{p+1}.

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\mu,\nu=1,2,3,\dots,\ell+1;$$
$$\bar a,\bar b,\bar c=\ell+2,\ell+3,\dots,p+2;$$
$$i=1,2,\dots,k; \qquad a=p+3,\dots,n+1.$$

Тогда уравнения плоскостей L_{p+1} и L_ℓ запишутся соответственно в виде: