оно является постоянной нулевой или ненулевой кривизны, а компоненты T, S^1 и S^2 можно выразить формулами (10)-(14).

Случай (5а, 5б):

$$S_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}\, S_{\mu} - \delta^{\alpha}{}_{\mu}\, S_{\beta}\ (S_{\mu} = \frac{t}{(n-1)\varphi} y_{\mu}); \qquad (15)$$

$$S_{\beta\alpha\mu\rho} \text{ – вида (9), но } A = \frac{(n-1)^2 - t^2}{(n-1)^2}. \qquad (16)$$

Теорема 4. *Если регулярное пространство $g^*_{n,y}$ типа (1) при 2+k+nw=0 допускает группу (v)w-изометрий (или (h)w-изометрий) $G_{(n+1)(n+2)/2}$, $n\geq 3$, то T=0, R^1=0, P^1=0, R^2=0, P^2=0, а S^1 и S^2 обладают компонентами вида (15),(16).*

Список литературы

1. *Thomas T.Y.* The differential invariants of generalized spaces. Cambridge, 1934. 243 p.

2. *Кручкович Г.И.* О пространствах В.Ф.Кагана // Каган В.Ф. Субпроективные пространства. М. Физматгиз, 1961. С. 163-195.

V.I. Makeev

INFINITESIMAL ISOMETRICS OF GENERAL METRIC SPACES OF VECTOR ELEMENTS WITH THE RELATIVE METRIC

We study infinitesimal relative isometrics of weight *w* in general metric paces of the vector elements $g^*_{n,y}$ of the certain type. The structure of the all torsion's and curvatures of the generalized affine connection for $g^*_{n,y}$ with maximum group of the isometrics has been established.

УДК 514.7

Т.Ю. Максакова

(Балтийский военно-морской институт)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ

Рассматриваются двойственные нормальные связности на центрированной тангенциально вырожденной гиперполосе CH^r_m проективного пространства P_n. Показано, что на обобщенно нормализованной гиперполосе $CH^r_m \subset P_n$ в расслоении обобщенных нормалей 1-го рода индуцируются четыре центропроективные связности $\overset{\bar\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ (нормальные связности), а в расслоении обобщенных нормалей 2-го рода индуцируются четыре двойственные им центропроективные связности $\overset{\bar\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$. Выяснены условия их совпадения.

В работе используется следующая схема индексов:

$$I, K, L=\overline{1,n};\ p, q, s=\overline{1,r};\ u, v, w=\overline{r+1,n-1};\ i, j, k=\overline{r+1,m};$$

$$\alpha, \beta, \gamma=\overline{m+1,n-1};\ \sigma, \rho, \tau=\overline{r+1,n};\ \bar\sigma=\{0,\sigma\};\ \varepsilon=\overline{1,3};\ \bar\varepsilon=\overline{0,3};\ \bar I, \bar K, \bar L=\overline{0,n}.$$

1. В репере первого порядка R_1 гиперполоса CH^r_m задается уравнениями (без соответствующих замыканий) [4]:

$$\begin{gathered}\omega^n_0=0, \omega^i_0=0, \omega^n_i=0, \omega^\alpha_i=0, \omega^n_\alpha=0,\\ \omega^n_p=a^n_{pq}\omega^q, \omega^i_p=b^i_{pq}\omega^q, \omega^\alpha_p=b^\alpha_{pq}\omega^q, \omega^p_i=b^p_{iq}\omega^q, \omega^p_\alpha=b^p_{\alpha q}\omega^q.\end{gathered} \tag{1}$$

Определение. *Обобщенной нормализацией* гиперполосы CH^r_m называется нормализация в смысле Нордена – Чакмазяна [3], [7] ее *направляющей поверхности V_r*, при которой в каждой точке $A_0 \in V_r$ плоскость $N_{n-r}(A_0)$ нормального поля проходит через характеристику $E_{n-r-1}(A_0)$ гиперполосы.

Поля *обобщенных нормалей* 1-го рода N_{n-r} (2-го рода N_{r-1}) определяются соответственно полями квазитензоров

$$\nabla\nu^p_n+\omega^p_n=\nu^p_{nq}\omega^q, \quad \nabla\nu^0_p+\omega^0_p=\nu^0_{pq}\omega^q. \tag{2}$$

Следуя работе [5], для гиперполосы CH^r_m запишем пучки нормалей 1-го (2-го) рода *обобщенной нормализации* в виде:

$$\nu^p_n(\sigma_1)=\sigma_1 T^p_n-W^p_n, \quad \nu^0_p(\sigma_2)=\sigma_2\left(F^0_p-W^0_p\right)+W^0_p\equiv\sigma_2 a^n_{pq}T^q_n+W^0_p, \tag{3}$$

где $F^p_n \overset{def}{=} \frac{1}{2}a^{pq}_n\left(l_q-d_q\right)$, $F^0_p \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(l_q+d_q\right)$, $W^p_n \overset{def}{=} -K^p$, $W^0_p \overset{def}{=} K_p$ [4],

$T^p_n \overset{def}{=} W^p_n+F^p_n$; σ_1, σ_2 – инвариантные параметры.

Нормали ν^p_n, ν^0_p пучков (3) двойственны [5] тогда и только тогда, когда $\sigma_1=\sigma_2$. По аналогии с работами [12], [6], гиперполосу CH^r_m назовем *коинцидентной*, если в каждой точке $A_0 \in V_r$ каждый из пучков (3) вырождается в одну нормаль. Из (3) следует, что гиперполоса CH^r_m коинцидентна тогда и только тогда, когда

(4)

Обращение в нуль тензора $T_p^0(\nu)$, т.е. условие

$$T_p^0(\nu) \overset{\text{def}}{=} d_p + a_{pq}^n \nu_n^q - \nu_p^0 = 0 \qquad (5)$$

является условием *взаимности* [5] обобщенной нормализации гиперполосы CH_m^r относительно поля соприкасающихся гиперквадрик [4]:

$$a_{pq}^n x^p x^q + 2d_p x^p x^n + l_{uv}^n x^u x^v + 2l_v x^v x^n + T_n \left(x^n\right)^2 = 2x^0 x^n,$$

где $d_p = \frac{1}{r+2} a^{qs} a_{sqp}$. Отметим, что поля нормалей Фубини $\left\{F_n^p, F_p^0\right\}$ и Вильчинского $\left\{W_n^p, W_p^0\right\}$ нормализуют гиперполосу $CH_m^r \subset P_n$ взаимно [3].

Под *обобщенным оснащением* гиперполосы CH_m^r в смысле Э.Картана [11] понимается такое оснащение, при котором каждой точке $A_0 \in V_r$ поставлена в соответствие плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$, не имеющая общих точек с касательной плоскостью $T_r(A_0)$ направляющей поверхности V_r [4]. Плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ можно задать точками

(6)

$$\begin{cases} \nabla \nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{vp}^0 \omega^p, \ \nabla \nu_n^0 + \nu_n^q \omega_q^0 + \nu_0^v \omega_v^0 + \omega_n^0 = \nu_{np}^0 \omega^p, \\ \nabla \nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{np}^v \omega^p, \ \nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nq}^p \omega^q. \end{cases} \qquad (7)$$

В качестве функций ν_n^v, ν_v^0 возьмем квазитензоры 2-го порядка $B_n^v = \frac{1}{r} b_{pq}^v a_n^{pq}$, $B_v^0 = -\frac{1}{r} b_{vp}^p$ [4], [2];

$$\nabla B_n^v + \omega_n^v = B_{np}^v \omega^p, \quad \nabla B_v^0 + \omega_v^0 = B_{vq}^0 \omega^q. \qquad (8)$$

В этом случае в каждой точке $A_0 \in V_r$ оснащающая плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ пересекает характеристику $E_{n-r-1}(A_0)$ по первой оси Кенигса:

$$K_{n-r-2}(A_0) = K_{n-r-1}(A_0) \cap E_{n-r-1}(A_0).$$

Будем говорить, что гиперполоса CH_m^r оснащена в смысле Э.Бортолотти [10], если каждой точке $A_0 \in V_r$ поставлена в соответствие гиперплоскость $N_{n-1}(A_0)$, не проходящая через точку A_0. Эта гиперплоскость задается уравнением

$$\nu_p^0 x^p + \mu_v^0 x^v + \mu_n^0 x^n - x^0 = 0; \tag{9}$$

$$\begin{cases} \nabla\mu_v^0 + \omega_v^0 = \mu_{vq}^0 \omega^q, \; (a) \;\; \nabla\nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pq}^0 \omega^q, \\ \nabla\mu_n^0 - \mu_v^0 \omega_n^v - \nu_p^0 \omega_n^p + \omega_n^0 = \mu_{nq}^0 \omega^q. \end{cases} \tag{10}$$

Из (10a) следует, что в качестве охватов функций μ_v^0 можно взять функции B_v^0 [4]. Таким образом, в этом случае оснащающая гиперплоскость $N_{n-1}(A_0)$ проходит через первую ось Кенигса $K_{n-r-2}(A_0)$ гиперполосы CH_m^r.

2. Следуя работам [8], [9], с учетом (1), (2), (6) – (10), получаем предложение.

Теорема 1. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена – Картана гиперполосе CH_m^r в расслоении обобщенных нормалей N_{n-r} индуцируется четыре нормальные связности $\overset{\bar{\varepsilon}}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм:*

$$\begin{aligned} &\overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_v^0 = \omega_v^0 - \nu_q^0 \omega_v^q, \; \overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_v^u = \omega_v^u - \delta_v^u \left(\omega_0^0 - \nu_q^0 \omega_0^q\right), \\ &\overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_n^v = B_{nq}^v \omega_0^q + \nu_n^p \omega_p^v - B_n^v \nu_n^p \omega_p^n, \; \overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_v^n = 0, \\ &\overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 + \nu_p^0 \omega_0^p + \nu_n^p \omega_p^n + \overset{\bar{\varepsilon}}{\Gamma}{}_{np}^n \omega_0^p, \\ &\overset{\bar{\varepsilon}}{\theta}{}_n^0 = \omega_n^0 + \nu_n^p \omega_p^0 + B_n^v \omega_v^0 - \nu_q^0 \left(\nu_{np}^q \omega_0^p + B_n^v \omega_v^q - \nu_n^q \nu_n^p \omega_p^n\right) + \nu_n^0 \overset{\bar{\varepsilon}}{\Gamma}{}_{np}^n \omega_0^p, \end{aligned} \tag{11}$$

где тензоры $\overset{\bar{\varepsilon}}{\Gamma}{}_{np}^n$ имеют следующие охваты:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{np}^n = 0, \overset{1}{\Gamma}{}_{np}^n = T_p^0, \overset{2}{T}{}_{np}^n = l_p - \nu_p^0 - a_{pq}^h \nu_n^q, \overset{3}{T}{}_{np}^n = a_{pq}^h T_n^q. \tag{12}$$

Нами построен во 2-й дифференциальной окрестности двойственный образ $\overline{CH}{}_m^r$ гиперполосы CH_m^r относительно инволютивного преобразования I форм $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ [2]. В силу этого имеет место теорема, двойственная теореме 1.

Теорема 2. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена – Бортолотти гиперполосе CH_m^r в расслоении нормалей 2-го рода N_{r-1} индуцируются четыре нормальные связности $\overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм*

$$\begin{aligned}
&\overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^0_v = l^n_{uv}\left(\omega^u_n + \nu^p_n\omega^u_p\right),\ \overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^u_v = \omega^u_v + l^{uw}_n l_{wvq}\omega^q_0 - \delta^u_v\left(\omega^0_0 - \nu^q_n\omega^n_q\right),\\
&\overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^n_v = 0,\ \overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^v_n = l^v_n\left(\nu^0_p\omega^p_u + B^0_{uq}\omega^q_0 + B^0_u\nu^0_q\omega^q_0\right),\\
&\overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^n_n = \omega^n_n - \omega^0_0 - \nu^0_p\omega^p_0 + \nu^p_n\omega^n_p + \overline{\overset{\varepsilon}{\Gamma}}{}^n_{np}\,\omega^p_0\,,\\
&\overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^0_n = \omega^0_n - \nu^0_p\omega^p_n - B^0_v\omega^v_n + \nu^p_n\left(\nu^0_{pq}\omega^q_0 - B^0_v\omega^v_p - \nu^0_p\nu^0_q\omega^q_0\right) + \mu^0_n\,\overline{\overset{\varepsilon}{\Gamma}}{}^n_{nq}\,\omega^q_0\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\overline{\overset{0}{\Gamma}}{}^n_{nq} = 0,\ \overline{\overset{1}{\Gamma}}{}^n_{nq} = -\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nq},\ \overline{\overset{2}{\Gamma}}{}^n_{nq} = \overset{2}{\Gamma}{}^n_{nq},\ \overline{\overset{3}{\Gamma}}{}^n_{nq} = \overset{3}{\Gamma}{}^n_{nq}, \tag{14}$$

а функции l^n_{uv}, l^{uv}_n введены в работе [2].

Каждая из систем форм $\left\{\overset{\varepsilon}{\theta}{}^\sigma_\tau\right\}$, $\left\{\overline{\overset{\varepsilon}{\theta}}{}^\sigma_\tau\right\}$ удовлетворяет соответствующим структурным уравнениям Картана – Лаптева [1]:

где системы функций $\left\{\overset{\varepsilon}{R}{}^\sigma_{\tau\,pq}\right\}$, $\left\{\overline{\overset{\varepsilon}{R}}{}^\sigma_{\tau\,pq}\right\}$ являются тензорами кривизны – кручения нормальных связностей $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^\perp$ и $\overline{\overset{\varepsilon}{\nabla}}{}^\perp$.

В силу соотношений (11) – (14) с учетом (1), (4), (5), (8) приходим к следующим предложениям.

Теорема 3. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена – Картана гиперполосе* CH^r_m *нормальные связности: 1)* $\overset{0}{\nabla}{}^\perp$ *и* $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ *совпадают тогда и только тогда, когда обобщенная нормализация является взаимной; 2)* $\overset{3}{\nabla}{}^\perp$ *и* $\overset{0}{\nabla}{}^\perp$ *совпадают тогда и только тогда, когда гиперполоса коинцидентна; 3)* $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ *и* $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$ *совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей 1-го рода является полем нормалей Фубини* F^p_n*; 4)* $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$ *и* $\overset{0}{\nabla}{}^\perp$ *вырождаются в одну тогда и только тогда, когда обобщенная нормализация есть нормализация Фубини* $\left\{F^p_n, F^0_p\right\}$.

Теорема 4. *На обобщенной нормализованной в смысле Нордена – Бортолотти гиперполосе* CH^r_m *нормальные связности: 1)* $\overline{\overset{0}{\nabla}}{}^\perp$ *и* $\overline{\overset{1}{\nabla}}{}^\perp$ *совпадают тогда и только тогда, когда обобщенная нормализация является* *взаимной; 2)* $\overset{3}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *совпадают тогда и только тогда, когда гиперполоса коинцидентна; 3)* $\overset{1}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{2}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей 1-го рода является полем нормалей Фубини* F_p^0*; 4)* $\overset{1}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, $\overset{2}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *и* $\overset{0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ *вырождаются в одну тогда и только тогда, когда обобщенная нормализация есть нормализация Фубини* $\{F_n^p, F_p^0\}$.

Для регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$ результаты теорем 3 и 4 получены П.А. Фисуновым [8], [9].

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275 – 382.

2. *Максакова Т.Ю.* Двойственный образ центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. № 30. С. 50 – 54.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

4. *Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы CH_m^r ранга r в проективном пространстве P_n / Калинингр. ВВМУ. Калининград, 1997. 45 с. Деп. в ВИНИТИ, № 197-В97.

5. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994. 290 с.

6. *Столяров А.В.* Сужения пространств проективной связности, индуцируемых на оснащенной гиперполосе // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. № 30. С. 73 – 84.

7. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28. № 4. С. 151 – 157.

8. *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной гиперполосе / Чуваш. пед. ин-т. Чебоксары, 1998. 20 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3394-В98.

9. *Фисунов П.А.* Центропроективные связности в нормальных расслоениях регулярной гиперполосы проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. № 30. С. 89 – 94.

10. *Bortolloti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. V. 3. P. 81 – 89.

11. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. МГУ. М.: 1937. Изд-во МГУ. № 4. С. 147 – 159.

12. *Mihailescu T.* Geometrie differentiala projectiva. Bucuresti, 1958. 494 p.

Yu. Maksakova

DUAL NORMAL CONNECTIONS ON THE DEGENERATE HYPERSTRIP

Dual normal connections on the centred tangential degenerate hyperstrip of the projective space are considered. It is shown, that four centerprojective connections and four centerprojective connection dual to above mentioned are induced on the generalized normalized hyperstrip in the generalized normals of the first kind bundle. Conditions of their coinsidence are cleared up.

УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

ДИОФАНТОВЫ СЕМЕЙСТВА ПИФАГОРОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрены подмножества прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон (пифагоровых треугольников), имеющих одинаковую гипотенузу. Такие подмножества называются диофантовыми, так как Диофант в 3-й книге «Арифметика» впервые нашел четыре пифагоровых треугольника с одинаковой гипотенузой ([1], с.112). Доказано, что диофантово семейство с гипотенузой $m_n=p_1p_2...p_n$, где p_i-последовательные простые числа вида 4k+1 ($k\in N$), состоит из $\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1}C_n^h$ пифагоровых треугольников. Указан метод нахождения таких семейств, и дана компьютерная программа Н.В.Малаховского определения диофантовых семейств для произвольного $n\in N$. Решена задача определения диофантова семейства с заданной гипотенузой $c\in N$.

§1. Базовая последовательность пифагоровых треугольников

Пифагоровы треугольники определяются диофантовыми формулами

$$(2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2), \tag{1.1}$$

где $m,n\in N$, $m>n$. Л.Эйлер доказал ([2], с.46-47), что всякое простое число $p=4k+1$, $k\in N$ единственным образом разлагается на сумму квадратов двух натуральных чисел: $p= m^2+n^2$. Следовательно, такое простое число определяет единственный пифагоров треугольник (1.1). Обозначим через p_i -i^e простое число 4k+1, т.е.

$$\begin{gathered}p_1=5,\ p_2=13,\ p_3=17,\ p_4=29,\ p_5=37,\ p_6=41,\ p_7= 53,\ p_8=61,\\ p_9=73,\ p_{10}=89,\ p_{11}=97,\ p_{12}=101,\ p_{13}=109,\ p_{14}=113,\ p_{15}=137,...\end{gathered} \tag{12}$$

Последовательность пифагоровых треугольников с гипотенузами p_i (i=1,2,...) назовем базовой. Для $1\le i \le 45$ получаем: