2. *Шевченко Ю. И.* Касательные и соприкасающиеся пространства проективного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 143—150.

3. *Полякова К. В.* Поверхность в пространстве проективной связности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 127—136.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

K. Polyakova

GENERALIZATION FOR DERIVATION FORMULAS
OF PROJECTIVE SPACE

Generalization for derivation formulas of projective space is considered. Derivation formulas for the projective bundle with identified base points is obtained. This bundle is called special projective bundle with a connection in the attached bundle of projective frames.

УДК 514.75

Ю. И. Попов

*(Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

ВВЕДЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНОЙ ПОЛОСЫ $\Pi_{r(m)}$ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Для регулярной полосы $\Pi_{r(m)}$ [1] вводятся инвариантные оснащения в смысле Нордена — Картана и в смысле Нордена — Бортолотти, а также двойственные нормальные связности в расслоении нормалей 1-го и 2-го рода базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$.

Во всей работе мы придерживаемся обозначений, замечаний работы [1] и следующей схемы индексов:

$$I,K=\overline{1,n};\ p,q,r,s,t=\overline{1,r};\ i,j,k=\overline{r+1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1};$$
$$u,v,w,x=\overline{r+1,n-1};\ \hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n};\ u,v=\{0;\ \overline{r+1,n-1}\};$$
$$\varepsilon=\overline{0;5};\ u,v=\{i,\alpha\}.$$

§ 1. Инвариантные оснащения полосы $\Pi_{r(m)}$

Известно [1], что регулярная полоса $\Pi_{r(m)}$ в репере 1-го порядка задается следующими уравнениями (без соответствующих замыканий):

$$\omega_0^{\hat{u}}=\omega_\alpha^n=\omega_i^n=0,\ \omega_p^n=\Lambda_{pq}^n\omega_0^q,\ \omega_p^i=\Lambda_{pq}^i\omega_0^q,\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pq}^\alpha\omega_0^q,$$
$$\omega_i^p=\Lambda_{iq}^p\omega_0^q,\ \omega_i^\alpha=\Lambda_{iq}^\alpha\omega_0^q,\ \omega_\alpha^p=\Lambda_{\alpha q}^p\omega_0^q,\ \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha q}^i\omega_0^q,$$

где

$$\Lambda_{[pq]}^n=\Lambda_{[pq]}^v=0,\ \Lambda_{\alpha i}^n=\Lambda_{vp}^n=0,\ \Lambda_{v[p}^{\mathrm{t}}\Lambda_{q]\mathrm{t}}^n=0.$$

Показано [1], что полоса $\Pi_{r(m)}$ имеет двойственный образ $\overline{\Pi}_{r(m)}$ и нормализация одной из полос равносильна нормализации другой, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями

$$\overline{\nu}_n^p=-\Lambda_n^{pq}\nu_q^o,\quad \overline{\nu}_p^o=\Lambda_{qp}^n\nu_n^q,\quad \overline{\nu}_n^i=-V_n^{ik}\nu_k^o,$$
$$\overline{\nu}_i^o=V_{ki}^n\nu_n^k,\quad \overline{\nu}_n^\alpha=-V_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^o,\quad \overline{\nu}_\alpha^o=V_{\beta\alpha}^n\nu_n^\beta.$$

Под *двойственной нормализацией* [2] базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$ понимается такая ее нормализация в смысле Нордена [3], при которой в каждой точке $A_0\in V_r$ нормаль 1-го рода $N_{n-r}(A_0)$ содержит характеристику $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ главной касательной гиперплоскости $H_{n-1}(A_0)$.

Поля нормалей 1-го рода N_{n-r} и 2-го рода N_{r-1} базисной поверхности V_r определяются соответственно полями квазитензоров $\{\nu_n^p\}$ и $\{\nu_p^o\}$, дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\nabla \nu_n^P + \omega_n^p = \nu_{nq}^p \omega_o^q, \ \ \nabla \nu_p^o + \omega_p^o = \nu_{pq}^o \omega_o^q.$$

Условием взаимности [3] нормализации полосы $V_r \subset \Pi_{r(m)}$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}^2 [4]

$$\Lambda_{pq}^n x^p x^q + 2\lambda_p x^p x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2b_v x^v x^n + T_n (x^n)^2 = 2x^o x^n$$

является обращение в нуль тензора

$$T_p^0(\nu) \overset{def}{=} \lambda_p + \Lambda_{pq}^n \nu_n^q - \nu_p^o,$$

где

$$\lambda_p = \frac{1}{r+2} \Lambda_n^{qt} \Lambda_{tqp}^n = \frac{1}{r+2} \Lambda_p^o, \quad b_v = \frac{1}{r} \Lambda_{pqv}^n \Lambda_n^{pq},$$

$$\nabla \lambda_p - \Lambda_{qp}^n \omega_n^q + \omega_p^o \equiv 0, \nabla \mathrm{b}_v + b_v \omega_o^o + \omega_v^o - b_{vK}^n \omega_n^K \equiv 0.$$

Следуя работе [4], в третьей дифференциальной окрестности определим для полосы $\Pi_{r(m)}$ двойственные поля нормалей Фубини $\{\Phi_n^p, \Phi_p^0\}$ и Вильчинского $\{W_n^p, W_p^o\}$, которые нормализуют полосу $\Pi_{r(m)}$ взаимно.

Квазитензоры $\{\Phi_n^p, \Phi_p^0\}$, $\{W_n^p, W_p^o\}$ имеют следующее строение [4; 5]:

$$\Phi_n^p = \frac{1}{2} \Lambda_n^{pq} (C_q - \lambda_q), \quad \Phi_p^0 = \frac{1}{2} (C_p + \lambda_p),$$

$$W_n^p = C^{pt} W_{nt}, \quad W_p^0 = \Lambda_{pt}^n (-W_n^t) + \lambda_p,$$

где

$$\nabla C_p + C_p \omega_o^o + \Lambda_{pq}^n \omega_n^q + \omega_p^o = C_{pq} \omega_o^q, \quad C_{[pq]} = 0. \qquad (1)$$

Дифференциальные уравнения (1) получены путем замыкания уравнения [4; 5] $d\ln\tilde{C}_n + \omega_o^o - \omega_n^n = C_p\omega_o^p$.

Определение. *Будем говорить, что полоса* $\Pi_{r(m)}$ *оснащена в смысле Э. Картана [4; 5], если каждой точке* $A_0 \in V_r$ *поставлена в соответствие плоскость* $K_{n-r-1}(A_0)$ *размерности* $n-r-1$, *не имеющая общих точек с касательной плоскостью* $\Lambda_r(A_0)$.

Плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ зададим точками

$$K_v = \nu_v^0 A_0 + A_v, \ K_n = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^p A_p + \nu_n^u A_u + A_n,$$

где

$$\nabla\nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{vq}^0\omega_0^q, \ \nabla\nu_n^0 + \nu_n^p\omega_p^0 + \lambda_n^v\omega_v^0 + \omega_n^0 = \nu_{nq}^0\omega_0^q,$$

$$\nabla\nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{nq}^v\omega_0^q, \ \nabla\nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nq}^p\omega^q. \qquad (2)$$

Охваты функций ν_n^v и ν_v^0 можно построить следующим образом. Вводим в рассмотрение квазитензоры:

$$\begin{aligned}
&\lambda_n^i = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^i\Lambda_n^{qp}, \quad \nabla\lambda_n^i + \omega_n^i = \lambda_{nq}^i\omega_o^q,\\
&\lambda_n^\alpha = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^\alpha\Lambda_n^{qp}, \quad \nabla\lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{nq}^\alpha\omega_o^q,\\
&\lambda_i^o = -\frac{1}{r}\Lambda_{ip}^p, \quad \nabla\lambda_i^o + \omega_i^o = \lambda_{iq}^o\omega_o^q,\\
&\lambda_\alpha^o = -\frac{1}{r}\Lambda_{\alpha p}^p, \quad \nabla\lambda_\alpha^o + \omega_\alpha^o = \lambda_{\alpha q}^o\omega_o^q.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Теперь с помощью функций (3) находим

$$\begin{aligned}
&\lambda_v^o = \{\lambda_i^o, \lambda_\alpha^o\}, \quad \nabla\lambda_v^o + \omega_v^o = \lambda_{vq}^o\omega_o^q,\\
&\lambda_n^v = \{\lambda_n^i, \lambda_n^\alpha\}, \quad \nabla\lambda_n^v + \omega_n^v = \lambda_{nq}^v\omega_o^q.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Таким образом, охваты функций ν_n^v, ν_v^0 имеют вид

$$\nu_v^0 = \lambda_v^o; \quad \nu_n^v = \lambda_n^v.$$

Следовательно, оснащение полосы $\Pi_{r(m)}$ в смысле Э. Картана равносильно заданию на полосе $\Pi_{r(m)}$ полей (2) геометрических объектов $\{\nu_n^p\}, \{\nu_n^p, \nu_n^o, \lambda_n^u\}$, при этом в каждой точке A_0 оснащающая плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ пересекает характеристику $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ по первой оси Кёнигса [4; 6]:

$$K_{n-r-2}(A_o) = K_{n-r-1}(A_0) \cap \Phi_{n-r-1}(A_0).$$

Условия неподвижности оснащающей плоскости Картана $K_{n-r-2}(A_0)$ имеют вид

$$\nu_{nq}^o + \lambda_u^o(\lambda_{nq}^u + \nu_n^p \Lambda_{pq}^u) - \nu_n^p \Lambda_{pq}^n(\nu_n^o + \lambda_u^o \lambda_n^u) = 0, \ \lambda_{uq}^o = 0, \quad (5)$$

$$\nu_{nq}^p + \nu_n^o \delta_q^p + \lambda_n^u \Lambda_{uq}^p - \nu_n^p \nu_n^t \Lambda_{tq}^n = 0, \ \Lambda_{uq}^p - \lambda_u^o \delta_q^p = 0. \quad (6)$$

Выполнение соотношений (6) является условием того, что при смещении точки A_0 смещение плоскости $K_{n-r-2}(A_0)$ не выходит за пределы нормали 1-го рода $H_{n-r}(A_o)$. По аналогии с работой [6] можно показать, что при r>1 оснащающая плоскость Картана $K_{n-r-2}(A_0)$ неподвижна при любом смещении точки A_0 тогда и только тогда, когда смещение плоскости Картана $K_{n-r-2}(A_0)$ не выходит за пределы нормали 1-го рода $N_{n-r}(A_o)$.

Определение. *Будем говорить, что полоса $\Pi_{r(m)}$ оснащена в смысле Э. Бортолотти [8], если каждой точке A_0 базисной поверхности V_r поставлена в соответствие гиперплоскость $B_{n-1}(A_0)$, не проходящая через точку A_0.*

Зададим гиперплоскость $B_{n-1}(A_0)$ уравнением

$$\nu_p^o x^p + \mu_v^o x^v + \mu_n^o x^n - x^o = 0. \quad (7)$$

Функции $\{\nu_p^o\}, \{\mu_u^o\}, \{\mu_n^o\}$, определяющие гиперплоскость $B_{n-1}(A_0)$, удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\nu_p^o + \omega_p^0 = \nu_{pq}^o\omega_o^q, \quad \nabla\mu_u^o + \omega_u^0 = \mu_{uq}^o\omega_o^q, \tag{8}$$
$$\nabla\mu_n^o - \mu_v^o\omega_n^v - \nu_p^o\omega_n^p + \omega_n^o = \mu_{nq}^o\omega_o^q.$$

Из уравнений (8) следует, что в качестве функций μ_v^o можно взять функции λ_v^o (4). Охват $\mu_v^o = \lambda_v^o$ равносилен тому, что оснащающая гиперплоскость $B_{n-1}(A_0)$ проходит через первую ось Кенигса $K_{n-r-2}(A_0)$ полосы $\Pi_{r(m)}$.

Оснащение в смысле Э. Бортолотти полосы $\Pi_{r(m)}$ полем гиперплоскостей B_{n-1} равносильно [6] оснащению в смысле Э. Картана двойственного образа $\overline{\Pi}_{r(m)}$ полем r-мерных плоскостей $\overline{K}_{n-r-1}(\overline{v})$ с первой осью Кенигса, определяемым полями объектов $\{\overline{\nu}_n^p\}, \{\overline{\nu}_n^p, \overline{\nu}_n^o, \overline{\lambda}_n^v\}$:

$$\overline{\nu}_n^p \overset{def}{=} -\Lambda_n^{pt}\nu_t^o, \quad \overline{\lambda}_n^v \overset{def}{=} -V_n^{vw}\lambda_w^o, \quad \overline{\nu}_n^o \overset{def}{=} \mu_n^o.$$

Условия неподвижности оснащающей гиперплоскости Бортолотти $B_{n-1}(A_0)$ имеют вид

$$\mu_{np}^o - \lambda_n^v(\lambda_{vp}^o + \nu_q^o\Lambda_{vp}^q) - \nu_p^o(\mu_n^o + \lambda_v^o\lambda_n^v) = 0, \; \lambda_{nq}^v = 0, \tag{9}$$
$$\mu_n^o\Lambda_{pq}^n + \lambda_u^o\Lambda_{pq}^v + \nu_p^o\nu_q^o - \nu_{pq}^o = 0, \; \Lambda_{pq}^v - \lambda_n^v\Lambda_{pq}^n = 0. \tag{10}$$

Выполнение соотношений (10) является условием того, что при смещении точки A_0 гиперплоскость $B_{n-1}(A_0)$ «вращается» вокруг нормали 2-го рода $N_{m-1}(A_0)$. При r>1 условий (10) достаточно для того, чтобы оснащающая гиперплоскость Бортолотти $B_{n-1}(A_0)$ была неподвижна.

Определение. *Полосу* $\Pi_{r(m)}$ *назовем сильно оснащенной, если она оснащена в смысле Э. Картана и Э. Бортолотти одновременно. Полосу* $\Pi_{r(m)}$ *назовем согласованно оснащенной, если она сильно оснащена и при этом в каждой точке* A_0 *базисной поверхности* V_r *оснащающие плоскости* $K_{n-r-1}(A_0)$ *и* $B_{n-1}(A_0)$ *инцидентны.*

Если полоса $\Pi_{r(m)}$ оснащена согласованно, то определяющие плоскость Картана $K_{n-r-1}(A_0)$ точки

$$K_v = \lambda_v^o A_o + A_v,\ \ K_n = \nu_n^o A_o + \nu_n^p A_p + \lambda_n^u A_u + A_n$$

принадлежат гиперплоскости $B_{n-1}(A_0)$ тогда и только тогда, когда обращается в нуль относительный инвариант [6]

$$T_n^o \overset{def}{=} \nu_n^o - \mu_n^o - \nu_p^o \nu_n^p - \lambda_u^o \lambda_n^u, \quad \mathrm{d}T_n^o + T_n^o(\omega_o^o - \omega_n^n) \equiv 0\,.$$

Отметим, что согласованное оснащение полосы $\Pi_{r(m)}$ является сильным, однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

§2. Двойственные нормальные связности в расслоении нормалей 1-го и 2-го рода на базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$

Так как геометрия базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$ получается из геометрии голономного Λ-подрасслоения, ассоциированного с Н-распределением, то из двенадцати охватов тензора Γ_{np}^n [8] для полосы $\Pi_{r(m)}$ подходят лишь те, которые определяются полями фундаментальных подобъектов $\{\Lambda_{pq}^n, \Lambda_{pqt}^n, \ldots\}$, $\{(\Lambda_{pq}^n, \Lambda_{pq}^u), \ldots\}$, $\{\Lambda_{uq}^n, \ldots\}$ полосы $\Pi_{r(m)}$:

$$\overset{0}{\varGamma}{}^n_{np} = 0, \overset{1}{\varGamma}{}^n_{np} = \lambda_p - \nu^o_p + \varLambda^n_{pq}\nu^q_n\,, \overset{2}{\varGamma}{}^n_{np} = l_p - \nu^o_p + \lambda^n_{pq}\nu^q_n\,,$$
$$\overset{3}{\varGamma}{}^n_{np} = h_p - \nu^o_p + \varLambda^n_{pq}\nu^q_n\,, \tag{11}$$
$$\overset{4}{\Gamma}{}^n_{np} = C_p - \nu^o_p + \Lambda^n_{pq}\nu^q_n, \quad \overset{5}{\Gamma}{}^n_{np} = \Lambda^n_{pq}T^q_n, \Lambda^n_{[\mathrm{pq}]} = 0.$$

Охваты тензоров $\overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np}$, соответствующие охватам (11), определяются следующим образом [8]:

$$\overset{0}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = 0, \overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{1}{\Gamma}{}^n_{np}, \overset{2}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{2}{\Gamma}{}^n_{np}, \overset{3}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{3}{\Gamma}{}^n_{np}, \tag{12}$$
$$\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{4}{\Gamma}{}^n_{np}, \overset{5}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{5}{\Gamma}{}^n_{np}.$$

На оснащенной в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти) базисной поверхности V_r полосы $\varPi_{r(m)}$ строение слоевых форм не зависит от охвата тензора Γ^n_{uv}. Таким образом, справедливы следующие два двойственных друг другу утверждения.

Теорема 1. *На оснащенной в смысле Нордена — Картана базисной поверхности V_r полосы $\varPi_{r(m)}$ в расслоении нормалей 1-го рода индуцируются шесть нормальных связностей $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемых системами слоевых форм*

$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}^o_v = \omega^o_v - \nu^o_q\omega^q_v, \ \overset{\varepsilon}{\theta}{}^n_v = 0\,,$$
$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}^o_n = \omega^o_n + \nu^p_n\omega^o_p + \lambda^v_n\omega^o_v - \nu^o_q(\nu^q_n + \omega^q_o + \lambda^v_n\omega^q_v - \nu^q_n\nu^p_n\omega^n_p) +$$
$$+\nu^o_n\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^n_{nq}\omega^q_o, \ \overset{\varepsilon}{\theta}{}^n_n = \omega^n_n - \omega^o_o + \nu^o_p\omega^p_o + \nu^p_n\omega^n_p + \overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^n_{nq}\omega^q_o, \tag{13}$$
$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}^u_v = \omega^u_v - \delta^u_v(\omega^o_o - \nu^o_p\omega^p_o), \ \overset{\varepsilon}{\theta}{}^u_n = \lambda^u_{nq}\omega^q_o + \nu^p_n\omega^u_p - \lambda^u_n\nu^p_n\omega^n_p.$$

В силу двойственной теории полосы $\Pi_{r(m)}$ [1], имеет место

Теорема 1*. *На оснащенной в смысле Нордена — Бортолотти базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$ в расслоении нормалей 2-го рода индуцируются шесть нормальных связностей $\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, определяемых системами слоевых форм*

$$\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{o}_{v}=V^{n}_{uv}(\omega^{u}_{n}+\nu^{p}_{n}\omega^{u}_{p}),\ \overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{o}_{n}=\omega^{o}_{n}+\nu^{o}_{p}\omega^{p}_{n}+\lambda^{o}_{u}\omega^{u}_{n}+$$

$$+\nu^{p}_{n}(\nu^{o}_{pq}\omega^{q}_{o}+\lambda^{o}_{u}\omega^{u}_{p}-\nu^{o}_{p}\nu^{o}_{q}\omega^{q}_{o})+\mu^{o}_{n}\overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{nq}\omega^{q}_{o},$$

$$\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{u}_{v}=\omega^{u}_{v}+V^{uw}_{n}V^{n}_{wvq}\omega^{q}_{o}-\delta^{u}_{v}(\omega^{o}_{o}-\nu^{p}_{n}\omega^{n}_{p}), \tag{14}$$

$$\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{v}_{n}=V^{vu}_{n}(\nu^{o}_{p}\omega^{p}_{u}+\lambda^{o}_{uq}\omega^{q}_{o}-\lambda^{o}_{u}\nu^{o}_{q}\omega^{q}_{o}),\ \overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{n}_{v}=0,$$

$$\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{n}_{n}=\omega^{n}_{n}-\omega^{o}_{o}+\nu^{o}_{p}\omega^{p}_{o}+\nu^{p}_{n}\omega^{n}_{p}+\overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np}\omega^{p}_{o}.$$

Из соотношений (11—14) следует, что для определения двойственных связностей $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ достаточно задания нормализации базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$ в смысле Нордена [3], для определения остальных связностей $\overset{1-6}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{1-6}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ требуется дополнительное оснащение соответственно в смысле Э. Картана или Э. Бортолотти.

Каждая из систем форм $\{\overset{\varepsilon}{\theta}{}^{\bar v}_{\bar u}\}, \{\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{\bar v}_{\bar u}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [9]:

$$D\overset{\varepsilon}{\theta}{}^{\bar v}_{\bar u}=\overset{\varepsilon}{\theta}{}^{\bar w}_{\bar u}\wedge\overset{\varepsilon}{\theta}{}^{\bar v}_{\bar w}+\overset{\varepsilon}{R}{}^{\bar v}_{\bar u pq}\omega^{p}_{o}\wedge\omega^{q}_{o},\ D\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{\bar v}_{\bar u}=\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{\bar w}_{\bar u}\wedge\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{\bar v}_{\bar w}+\overset{\varepsilon}{\overline{R}}{}^{\bar v}_{\bar u pq}\omega^{p}_{o}\wedge\omega^{q}_{o}.$$

Компоненты тензоров $\overset{\varepsilon}{R}{}^{\bar u}_{\bar v pq}$, $\overset{\varepsilon}{\bar{\mathrm{R}}}{}^{\bar u}_{\bar v pq}$ кривизны-кручения двойственных связностей $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{\varepsilon}{\bar\nabla}{}^{\perp}$ имеют следующие строения:

$$\overset{\varepsilon}{R}{}^{o}_{vpq}=\Lambda^{s}_{v[p}\nu^{o}_{|s|q]}-\nu^{o}_{s}\Lambda^{s}_{v[p}\nu^{o}_{q]},\quad \overset{\varepsilon}{R}{}^{u}_{vpq}=-\delta^{u}_{v}\nu^{o}_{pq}-\Lambda^{u}_{t[p}\Lambda^{t}_{|v|q]},$$

$$\begin{aligned}\overset{\varepsilon}{R}{}^{o}_{npq}=\;&\nu^{s}_{n[p}\nu^{o}_{|s|q]}+\nu^{t}_{n}(\nu^{s}_{n}\nu^{o}_{t[p}\Lambda^{n}_{|s|q]}+\nu^{o}_{t}\nu^{s}_{n[p}\Lambda^{n}_{|s|q]})+\nu^{o}_{s}(\nu^{s}_{n}\nu^{t}_{n}\Lambda^{n}_{t[p}\nu^{o}_{q]}-\\&-\nu^{s}_{n[p}\nu^{o}_{q]}-\lambda^{w}_{n}\Lambda^{s}_{w[p}\nu^{o}_{q]})+\lambda^{w}_{n}\Lambda^{s}_{w[p}\nu^{o}_{|s|q]}-\nu^{o}_{n}[\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^{n}_{n[pq]}+\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^{n}_{nt}(\nu^{s}_{n}\Lambda^{n}_{s[p}\delta^{t}_{q]}+\\&+\nu^{o}_{[p}\delta^{t}_{q]}]+\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^{n}_{nt}[\nu^{o}_{n[p}\delta^{t}_{q]}-\nu^{o}_{s}(\nu^{s}_{n[p}\delta^{t}_{q]}+\lambda^{w}_{n}\Lambda^{s}_{w[p}\delta^{t}_{q]})+\nu^{o}_{s}\nu^{s}_{n}\nu^{r}_{n}\Lambda^{n}_{r[p}\delta^{t}_{q]}],\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\overset{\varepsilon}{R}{}^{v}_{npq}=\;&\nu^{t}_{n[p}\Lambda^{v}_{|t|q]}-\lambda^{v}_{n}\nu^{t}_{n[p}\Lambda^{n}_{|t|q]}+\lambda^{u}_{n}\Lambda^{t}_{u[p}\Lambda^{v}_{|t|q]}+\nu^{t}_{n}\nu^{s}_{n}\Lambda^{v}_{t[p}\Lambda^{n}_{|s|q]}+\\&+\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^{n}_{nt}(\Lambda^{v}_{n[p}\delta^{t}_{q]}+\nu^{s}_{n}\Lambda^{v}_{s[p}\delta^{t}_{q]}-\lambda^{v}_{n}\nu^{s}_{n}\Lambda^{n}_{s[p}\delta^{t}_{q]}),\quad \overset{\varepsilon}{R}{}^{n}_{vpq}=0,\end{aligned}$$

$$\overset{\varepsilon}{R}{}^{n}_{npq}=\nu^{t}_{n[p}\Lambda^{n}_{|t|q]}-\nu^{o}_{[pq]}-\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}^{n}_{n[pq]},$$

$$\overset{\varepsilon}{\bar R}{}^{o}_{vpq}=V^{n}_{uv}(\nu^{t}_{n}\nu^{s}_{n}\Lambda^{u}_{t[p}\Lambda^{n}_{|s|q]}-\Lambda^{u}_{t[p}\nu^{t}_{|n|q]}),$$

$$\begin{aligned}\overset{\varepsilon}{\bar R}{}^{o}_{npq}=\;&\nu^{s}_{n[p}\nu^{o}_{|s|q]}+\nu^{o}_{t}(\nu^{t}_{n}\nu^{o}_{[pq]}-\nu^{t}_{n[p}\nu^{o}_{q]})+\nu^{s}_{n}\nu^{t}_{n}(\nu^{o}_{s[p}\Lambda^{n}_{|t|q]}-\\&-\nu^{o}_{s}\nu^{o}_{[p}\Lambda^{n}_{|t|q]}+\lambda^{o}_{u}\Lambda^{u}_{s[p}\Lambda^{n}_{|t|q]})-\lambda^{o}_{u}\Lambda^{u}_{t[p}\nu^{t}_{|n|q]}+\mu^{o}_{n[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]}+\\&+\nu^{t}_{n}(\nu^{o}_{t[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]}-\nu^{o}_{t}\nu^{o}_{[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]}+\lambda^{o}_{u}\Lambda^{u}_{t[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]})-\mu^{o}_{n}(\nu^{o}_{[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]}+\\&+\nu^{t}_{n}\Lambda^{n}_{t[p}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{|n|q]}-\mu^{o}_{n}\overset{\varepsilon}{\bar\Gamma}{}^{n}_{n[pq]},\end{aligned}$$

$$\overset{\varepsilon}{\bar R}{}^{u}_{vpq}=-\delta^{u}_{v}\Lambda^{n}_{t[p}\nu^{t}_{|n|q]}-V^{uw}_{n}V^{n}_{xv}\Lambda^{t}_{w[p}\Lambda^{x}_{|t|q]},\quad \overset{\varepsilon}{\bar R}{}^{n}_{vpq}=0,\tag{16}$$

$$\overset{\varepsilon}{\bar R}{}^{v}_{npq}=V^{vu}_{n}(\nu^{o}_{t[p}\Lambda^{t}_{|u|q]}+\lambda^{o}_{u}\nu^{o}_{[pq]}+\lambda^{o}_{w}\Lambda^{w}_{t[p}\Lambda^{t}_{|u|q]}+\nu^{o}_{t}\Lambda^{t}_{u[p}\nu^{o}_{q]}+$$

$$+\nu_t^o \Lambda_{u[p}^t \overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{|n|q]}^n + \lambda_{u[p}^o \overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{|n|q]}^n - \lambda_u^o \nu_{[p}^o \overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{|n|q]}^n),$$

$$\overset{\varepsilon}{\overline{R}}{}_{npq}^n = \nu_{n[p}^t \Lambda_{|t|q]}^n - \nu_{[pq]}^o - \overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n.$$

Отметим, что функции $\overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n, \overset{\varepsilon}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n$, входящие в соотношения (15), (16), можно представить в виде:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = 0,\ \overset{1}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = \lambda_{[pq]} - \overset{0}{\nu}_{[pq]} + \Lambda_{t[pq]}^n \nu_n^t + \Lambda_{t[p}^n \nu_{|n|q]}^t,$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = l_{[pq]} - \nu_{[pq]}^o + \Lambda_{t[pq]}^n \nu_n^t + \Lambda_{t[p}^n \nu_{|n|q]}^t,$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = h_{[pq]} - \nu_{[pq]}^o + \Lambda_{t[pq]}^n \nu_n^t + \Lambda_{t[p}^n \nu_{|n|q]}^t,$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = C_{[pq]} - \nu_{[pq]}^o + \Lambda_{t[pq]}^n \nu_n^t + \Lambda_{t[p}^n \nu_{|n|q]}^t,\ \overset{5}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = \Lambda_{s[p}^n T_{|n|q]}^s,$$

$$\overset{6}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n = C_{[pq]} + 3\lambda_{[pq]} - 4\nu_{[pq]}^o + 2\Lambda_{t[pq]}^n \nu_n^t + \Lambda_{t[p}^n \nu_{|n|q]}^t.$$

$$\overset{0}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = 0,\ \overset{1}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = -\overset{1}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n,\ \overset{2}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = -\overset{2}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n,\ \overset{3}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = -\overset{3}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n,$$

$$\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = -\overset{4}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n,\ \overset{5}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = -\overset{5}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n,\ \overset{6}{\overline{\Gamma}}{}_{n[pq]}^n = \overset{6}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n - 6\overset{1}{\Gamma}{}_{n[pq]}^n.$$

Системы форм $\{\overset{\varepsilon}{\theta}{}_{\bar{v}}^{\bar{u}}\}, \{\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}_{\bar{v}}^{\bar{u}}\}, \{\overset{\varepsilon}{\theta}{}_v^u\}, \{\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}_v^u\}$ задают соответственно подсвязности нормальных связностей $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, где $\{\overset{\varepsilon}{\theta}{}_{\bar{v}}^{\bar{u}}\}$ — формы нормальной связности, определенной в расслоении характеристик Φ_{n-r-1}; $\{\overset{\varepsilon}{\theta}{}_v^u\}$ — формы нормальной связности, определенной в расслоении направлений в характеристиках Φ_{n-r-1}; $\{\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}_{\bar{v}}^{\bar{u}}\}$ — формы нормальной связности, заданной в расслоении касательных плоскостей M_m, $\{\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^u_v\}$ — формы нормальной связности, определенной в расслоении направлений в касательных плоскостях M_m.

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Регулярные полосы проективного пространства, ассоциированного с $\mathcal{H}$-распределением // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 117—123.

2. *Чакмазян А. В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28, №4. С. 151—157.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполостного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

5. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределенный проективного пространства: монография. СПб., 1992.

6. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: монография. Чебоксары, 1992.

7. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varietá luogo di spari; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sce. Univ. Cagliari. 1933. Vol. 3. P. 81—89.

8. *Попов.* Ю.И. Двойственные нормальные связности базисного подрасслоения $\mathcal{SH}$-распределения проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 137—144.

9. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва, 1953. Т. 2. С. 275—382.

Yu. Popov

INTRODUCTION OF DUAL NORMAL CONNECTIONS
FOR THE REGULAR STRIP $\Pi_{r(m)}$ IN THE PROJECTIVE SPACE

Dual normal connections in the bundle of normals of the 1-st and 2-nd kind for the base surface of the strip $\Pi_{r(m)} \subset P_n$ are considered.

УДК 514.76

Ю. А. Трофимов

(Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского)

О КАНОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ

Рассматриваются вопросы, связанные с канонической плоской связностью на расслоении линейных реперов. Вычисляются коммутаторы базисных векторных полей, компоненты тензоров кривизны и кручения, значения этой связности на векторных полях специального вида.

В работе [1] вводятся понятия линейного репера, расслоения линейных реперов, адаптированного репера на координатной окрестности.

Пусть M_n — связное, дифференцируемое класса C^∞ многообразие размерности n, $L(M_n)$ — расслоение линейных реперов над M_n, $\{U, x^i\}$ — координатная окрестность на M_n, $\{\pi^{-1}(U), (x^i, x^i_\alpha)\}$ — координатная окрестность на $L(M_n)$.

Пусть на M_n задана линейная связность ∇ без кручения. Тогда мы можем построить лифты тензорных полей с базы в расслоение $L(M_n)$. Если $\{\partial_i\} = \{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ и $\{dx^i\}$ — поля натурального репера и корепера на M_n, то $\{\partial_i^H, \partial_i^{(\alpha)}\}$ и $\{(dx^i)^V, (dx^i)^{He_\alpha}\}$ — поля адаптированного к связности ∇ ре-