УДК 514.75(08)

Ю. И. Попов

НОРМАЛИЗАЦИИ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m

Доказана теорема существования заданной гиперполосы $SH_m \subset A_n$ с сопряженной системой $(\Delta;\Delta^*)$ плоских элементов: касательные подрасслоения (m – 1)-плоскостей (Δ-подрасслоение) и прямых (Δ^*-подрасслоение). Построены внутренние пучки нормализаций гиперполосы SH_m и ее касательных подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Mission and proof of existence theorem for hyperband $SH_m \subset A_n$ which carrier conjugated system $(\Delta;\Delta^*)$ of planar elements are examined: the tangent subbundle of $(\Delta;\Delta^*)$-planes (Δ-subbundle) and the tangent subbundle of lines (Δ^*-subbundle). Internal beams of normalizations of hyperband SH_m and its tangent subbundles in the second-order differential neighborhood are constructed.

Ключевые слова: оснащение, подрасслоение, регулярная гиперполоса, тензор, квазитензор, коинциндентность.

Key words: equipment, subbundle, regular hyperband, tensor, quasitensors, co-incidence.

1. Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$I, J, K = \overline{1, n};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1};\ i, j, k = \overline{1, m};\ \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{m+1, n};\ p, q, r, s, t = \overline{2, m}.$$

2. Оператор дифференцирования ∇ действует по закону

$$\nabla T^{\beta ip}_{\alpha jqn} = dT^{\beta ip}_{\alpha jqn} + T^{\gamma ip}_{\alpha jqn}\omega^{\beta}_{\gamma} + T^{\beta kq}_{\alpha jqn}\omega^{i}_{k} + T^{\beta it}_{\alpha jqn}\omega^{q}_{t} - T^{\beta ip}_{\gamma jqn}\omega^{\gamma}_{\alpha} - T^{\beta ip}_{\alpha kqn}\omega^{k}_{j} - T^{\beta ip}_{\alpha jth}\omega^{t}_{q} - T^{\beta ip}_{\alpha jqn}\omega^{n}_{n}.$$

1. Задание гиперполосы SH_m в *n*-мерном аффинном пространстве A_n

1. Пусть $R = \{M, \vec{e}_J\}$ — подвижной репер аффинного пространства A_n. Дифференциальные уравнения его инфинитезимального перемещения

$$d\vec{A} = \omega^J \vec{e}_J, \quad d\vec{e}_J = \omega^K_J \vec{e}_K. \tag{1}$$

Инвариантные формы ω^J, ω^K_J аффинной группы

$$d\omega^J = \omega^L \wedge \omega^J_L, \quad d\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L. \tag{2}$$

В аффинном пространстве A_n рассмотрим *m*-мерную гиперполосу H_m [1], то есть *m*-параметрическое семейство таких гиперплоскостных элементов (A, τ), что точка A описывает базисную поверхность V_m

гиперполосы, а каждая гиперплоскость $\tau(A)$ является касательной гиперплоскостью гиперполосы в соответствующей точке $A \in V_m$.

Пусть H_m оснащена полем $(m-1)$-мерных касательных плоскостей $\Lambda_{m-1} \overset{\text{def}}{=} \Delta$. Это касательное гиперподрасслоение на базисной поверхности $V_m \subset H_m$ назовем Δ-*подрасслоением*. Поле плоскостей $\Delta(A)$ порождает сопряженное ему поле касательных прямых L_1 относительно асимптотического пучка тензоров $\{b^{\hat\alpha}_{ij}\}$ [2] базисной поверхности V_m в H_m.

Известно [2], что необходимое и достаточное условие сопряженности плоскостей $\Lambda_{m-1}(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta(A)$ и прямых $L_1(A) = \Delta^*(A)$ — обращение в нуль $b^{\hat\alpha}_{1p}$:

$$b^{\hat\alpha}_{1p} = b^{\hat\alpha}_{p1} = 0. \tag{3}$$

Гиперполосу $H_m \subset A_n$, несущую сопряженную систему (Δ, Δ^*), назовем кратко *гиперполосой* SH_m.

2. Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности $V_m \subset A_m$. Векторы $\{\vec e_p\}$ поместим в касательную плоскость $\Lambda_{m-1}(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta(A)$, а вектор $\vec e_1$ выберем параллельным прямой $L_1(a)$.

Векторы $\{\vec e_\alpha\}$ поместим в характеристику $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосы SH_m, а вектор $\vec e_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\vec e_p, \vec e_\alpha, \vec e_1\}$ репер $\{A, \vec e_J\}$ пространства A_n. Канонизированный таким образом репер назовем *репером первого порядка* R^1. Относительно репера R^1 гиперполоса $SH_m \subset A_n$ задается уравнениями

$$\omega^n_0 = 0, \quad \omega^\alpha_0 = 0, \quad \omega^n_\alpha = 0, \tag{4}$$

$$\omega^n_p = b^n_{pq}\omega^q, \quad \omega^n_1 = b^n_{11}\omega^1, \quad \omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq}\omega^q, \quad \omega^\alpha_1 = b^\alpha_{11}\omega^1, \tag{5}$$

$$\omega^1_p = \lambda^1_{pi}\omega^i, \quad \omega^p_1 = \lambda^p_{1i}\omega^i, \quad \omega^1_\alpha = \lambda^1_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha i}\omega^i. \tag{6}$$

Замыкая уравнения (5)—(6) внешним образом с учетом (1)—(6) и применяя лемму Картана [4], получим:

$$\nabla b^n_{pq} = b^n_{pqi}\omega^i, \quad \nabla b^n_{11} = b^n_{11i}\omega^i, \tag{7}$$

$$\nabla b^\alpha_{pq} + b^n_{pq}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{pqi}\omega^i, \quad \nabla b^\alpha_{11} + b^n_{11}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{11i}\omega^i, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \nabla\lambda^1_{pi} + b^n_{pi}\omega^1_n = \lambda^1_{pij}\omega^j, \nabla\lambda^p_{1i} + b^n_{1i}\omega^p_n = \lambda^p_{1ij}\omega^j, \\ \nabla\lambda^1_{\alpha i} = \lambda^1_{\alpha ij}\omega^j, \nabla\lambda^p_{\alpha i} = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j. \end{cases} \tag{9}$$

Замыкание уравнений (4) приводит к соотношениям

$$b^n_{[pq]} = 0; \quad b^\alpha_{[pq]} = 0; \quad \lambda^t_{\alpha[p} b^n_{q]t} = 0; \tag{10}$$

$$\lambda^p_{\alpha 1} b^n_{pq} = \lambda^1_{\alpha q} b^n_{11} \Leftrightarrow \lambda^1_{\alpha q} = \lambda^p_{\alpha 1} b^{11}_n b^n_{pq}. \tag{11}$$

Рассматриваются регулярные гиперполосы SH_m [1], для которых характеристика $X_{n-m-1}(A)$ и касательная гиперплоскость $T_m(A)$ поверхности V_m в каждой точке $A \subset V_m$ находятся в общем положении:

$$X_{n-m-1}(A) \cap T_m(A) = A, \quad \left[X_{n-m-1}(A), T_m(A)\right] = \tau(A).$$

В силу этого замечания из соотношений (3) и (10) следует, что система функций b_{ij}^n образует невырожденный симметрический тензор первого порядка — главный фундаментальный тензор гиперполосы SH_m [1], который распадается на два невырожденных симметрических тензора первого порядка b_{pq}^n и b_{11}^n: $\left|b_{ij}^n\right| = \begin{vmatrix} b_{pq}^n & 0 \\ 0 & b_{11}^n \end{vmatrix}$.

Тензор первого порядка b_{pq}^n назовем *главным фундаментальным тензором* SH_m, *ассоциированным с Δ-подрасслоением*, а тензор b_{11}^n — *главным фундаментальным тензором* SH_m, *ассоциированным с* Δ^**-подрасслоением*.

Для невырожденных тензоров b_{pq}^n и b_{11}^n введем обратные им тензоры b_n^{pq} и b_n^{11}, компоненты которых удовлетворяют условиям:

$$b_{pq}^n b_n^{qt} = \delta_p^t, \quad \nabla b_n^{pq} = -b_n^{tp} b_n^{sq} b_{tsi}^n \omega^i = b_{ni}^{pq} \omega^i, \tag{12}$$

$$b_{11}^n b_n^{11} = 1, \quad \nabla b_n^{11} = b_{ni}^{11} \omega^i. \tag{13}$$

Теорема 1. *Регулярная гиперполоса* $SH_m \subset A_n$, *несущая сопряженную систему* $S(\Delta, \Delta^*)$, *в репере первого порядка задается дифференциальными уравнениями (4) – (9) и соотношениями (10) – (11).*

Геометрические объекты

$$\Gamma_1 = \{b_{pq}^{\hat\alpha}, b_{11}^{\hat\alpha}\}, \Gamma_2 = \{\Gamma_1, b_{pqi}^{\hat\alpha}, b_{11i}^{\hat\alpha} \lambda_{pi}^1, \lambda_{1i}^p, \lambda_{\alpha i}^1, \lambda_{\alpha i}^p\}, \Gamma_3 = \{\Gamma_2, b_{pqij}^{\hat\alpha}, b_{11ij}^{\hat\alpha} \lambda_{pij}^1, \lambda_{1ij}^p, \lambda_{\alpha ij}^1, \lambda_{\alpha ij}^p\} \;—$$

фундаментальные объекты 1—3-го порядков гиперполосы SH_m.

Построенная таким образом последовательность $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3$ геометрических объектов называется *фундаментальной последовательностью* геометрических объектов [5], [6] гиперполосы SH_m.

2. Теорема существования гиперполосы SH_m

Теорема 2. *Гиперполоса* SH_m *аффинного пространства, несущая сопряженную систему* $S(\Delta, \Delta^*)$, *существует и определяется с произволом* $(m-1)(n-m+1)$ *функций n аргументов.*

Доказательство. Все уравнения, с учетом (11), входящие в чистое замыкание системы (5) — (6), можно записать в виде

$$\begin{gathered} \Delta b_{11}^n \wedge \omega^1 = 0, \Delta b_{11}^\alpha \wedge \omega^1 = 0, \Delta\lambda_{\alpha 1}^1 \wedge \omega^1 = 0, \Delta\lambda_{pi}^1 \wedge \omega^i = 0, \\ \Delta\lambda_{\alpha i}^p \wedge \omega^i = 0, \Delta\lambda_{1i}^p \wedge \omega^i = 0, \Delta b_{pq}^n \wedge \omega^q = 0, \Delta b_{pq}^\alpha \wedge \omega^q = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\Delta b_{11}^n = \nabla b_{11}^n$, $\Delta b_{11}^\alpha = \nabla b_{11}^\alpha + b_{11}^n \omega_n^\alpha$, $\Delta\lambda_{\alpha 1}^1 = \nabla\lambda_{\alpha 1}^1$, $\Delta\lambda_{1i}^p = \nabla\lambda_{1i}^p + \lambda_{1i}^n \omega_n^p$,

$$\Delta\lambda^p_{\alpha i} = \nabla\lambda^p_{\alpha i},\ \Delta\lambda^1_{pi} = \nabla\lambda^1_{pi} + b^n_{pi}\omega^1_n,\ \Delta b^n_{pq} = \nabla b^n_{pq},\ \Delta b^\alpha_{pq} = \nabla b^\alpha_{pq} + b^n_{pq}\omega^\alpha_n.$$

Определим характеры системы (14) [7]:

$$S_1 = 2(n-m-1)+1+(m-1)(n-m+1)+(m-1)(n-m),$$

$$S_2 = A+(m-2)(n-m),\quad S_3 = A+(m-3)(n-m),\ \ldots,$$

$$S_{m-1} = A+[m-(m-1)](n-m),\ S_m = A \stackrel{\text{def}}{=} (m-1)(n-m+1).$$

Вычисляем число Картана системы (14) [4]:

$$Q = S_1+2S_2+3S_3+\ldots+mS_m = [2(n-m-1)+1]+A+(m-1)(n-m)+$$

$$+2A+2(m-2)(n-m)+\ldots+(m-1)A+(m-1)[m-(m-1)](n-m)+$$

$$+mA = \{2(n-m-1)+1\}+A\frac{m(m+1)}{2}+(n-m)\frac{m(m-1)(m+1)}{6}.$$

Разрешим систему (14) по лемме Картана:

$$\begin{gathered}\Delta b^n_{11} = b^n_{111}\omega^1,\ \Delta b^\alpha_{11} = b^\alpha_{111}\omega^1,\ \Delta\lambda^1_{\alpha 1} = \lambda^1_{\alpha 11}\omega^1,\ \Delta\lambda^1_{pi} = \lambda^1_{pij}\omega^j,\\ \Delta\lambda^p_{\alpha i} = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j,\ \Delta\lambda^p_{1i} = \lambda^p_{1ij}\omega^j,\ \Delta b^n_{pq} = b^n_{pqt}\omega^t,\ \Delta b^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pqt}\omega^t.\end{gathered} \tag{15}$$

Найдем число N линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (15):

$$N = \{2(n-m-1)+1\}+A\frac{m(m+1)}{2}+(n-m)\frac{m(m-1)(m+1)}{6}.$$

Итак, $Q = N$. Следовательно, система (14) находится в инволюции [4] [6]. Таким образом, гиперполоса SH_m существует и определяется с произволом $(m-1)(n-m+1)$ функций n аргументов.

3. Пучки аффинных нормалей 1-го рода гиперполосы SH_m

1. Тензор b^n_{ij} гиперполосы SH_m удовлетворяет уравнениям [8]:

$$\nabla b^n_{ij} = b^n_{ijk}\omega^k. \tag{16}$$

Замыкая уравнение (16), с учетом (3) — (8) получим

$$\nabla b^n_{ijk} = b^n_{(ij}b^n_{k)l}\omega^l_n + b^n_{ijkl}\omega^l. \tag{17}$$

Найдем дифференциальные уравнения для функций b^n_{pqi}, b^n_{11i} из уравнений (17), придавая индексам i, j, k значения $(p, q, t, 1)$.

В результате в силу соотношений (3) — (8) получим:

$$\begin{gathered}\nabla b^n_{pqt} = b^n_{s(p}b^n_{qt)}\omega^s_n + b^n_{1(pq}\lambda^1_{t)i}\omega^i + b^n_{pqti}\omega^i,\ \nabla b^n_{111} = b^n_{1(1}b^n_{11)}\omega^1_n + b^n_{p(11}\lambda^1_{1)i}\omega^i + b^n_{111i}\omega^i,\\ \nabla b^n_{pq1} = b^n_{pq}b^n_{11}\omega^1_n + b^n_{pq1i}\omega^i,\ \nabla b^n_{11p} = b^n_{11}b^n_{pq}\omega^q_n + b^n_{11pi}\omega^i.\end{gathered} \tag{18}$$

Введем в рассмотрение функции 1-го порядка

$$\lambda_n^\alpha = \frac{1}{m} b_{ij}^\alpha b_n^{ij} = \frac{1}{m}(b_{11}^\alpha b_n^{11} + b_{pq}^\alpha b_n^{pq}) \qquad (19)$$

и функции второго порядка

$$B_n^i = -\frac{1}{m+2} b_n^{kj} b_{kjh}^n b_n^{hi},\ A_n^p = -b_n^{11} b_{11q}^n b_n^{qp},\ A_p^1 = -\frac{1}{m-1} b_n^{qt} b_{qt1}^n b_n^{11}, \qquad (20)$$

$$T_n^1 = -\frac{1}{3} b_n^{11} b_{111}^n b_n^{11}, \quad T_n^p = -\frac{1}{m+1} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}. \qquad (21)$$

Дифференцируя (19) — (21), с учетом (9), (10), (16) — (18) получаем:

$$\begin{aligned} &\nabla\lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i,\ \nabla B_n^i + \omega_n^i = B_{nj}^i \omega^j,\ \nabla A_n^p + \omega_n^p = A_{ni}^p \omega^i, \\ &\nabla A_n^1 + \omega_n^1 = A_{ni}^1 \omega^i,\ \nabla T_n^1 + \omega_n^1 = T_{ni}^1 \omega^i,\ \nabla T_n^p + \omega_n^p = T_{ni}^p \omega^i. \end{aligned} \qquad (22)$$

Таким образом, из уравнений (22) следует, что совокупности функций (19) — (21) суть квазитензоры гиперполосы SH_m.

Отметим, что квазитензоры $\{B_n^i, \lambda_n^\alpha\}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка задают нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \vec{e}_\alpha, \vec{B}_n]$ [8], где $\vec{B}_n = \vec{e}_n + B_n^i \vec{e}_i + \lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha$. Нормаль Бляшке для гиперплоскостных распределений и гиперповерхностей аффинного пространства A_n была впервые введена Э. Д. Алшибая [12], а для гиперполосных распределений и гиперполос аффинного пространства — в работах [8], [10].

Прямую $B_1 = [A, \vec{B}_n]$ назовем *прямой Бляшке гиперполосы* SH_m. Тогда нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \vec{B}_n, X_{n-m-1}(A)]$ в каждой $A \in V_m$ натянута на характеристику $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосы и прямую $B_1 = [A, \vec{B}_n]$ Бляшке.

2. Согласно теореме Тренсона [3] для регулярных гиперполос: аффинные нормали всех плоских сечений V_{n-1}^m m-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Delta(A)$, лежат в $(n-m+1)$-плоскости

$$T_{n-m+1}(A) = [A, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_1, \vec{e}_n + T_n^p \vec{e}_p], \qquad (23)$$

то есть в нормали Тренсона плоскости $\Delta(A) \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{m-1}(A)$ (нормаль Тренсона элемента Δ-распределения). Аналогично, нормалью Тренсона элемента Δ^*-подрасслоения (прямой $L_1(A)$) является гиперплоскость

$$T_{n-1}(A) = [A, \vec{e}_p, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_n + T_n^1 \vec{e}_1]. \qquad (24)$$

В (23) и (24) квазитензоры $\{T_n^1\}$ и $\{T_n^p\}$ определены формулами (21).

Определение 1. *Нормалью Тренсона* в каждой точке $A \in V_m$ гиперполосы SH_m назовем $(n-m)$-плоскость $T_{n-m}(A) = T_{n-m+1}(A) \cap T_{n-1}(A)$ — плоскость пересечения нормалей Тренсона плоскостей $\Lambda(A)$ и $L(A)$ соответственно (плоскостей $\Delta(A)$ и $\Delta^*(A)$ соответственно).

Определение 2. Прямую $T_1(A) = [A, \vec{T}_n]$, где $\vec{T}_n = \vec{e}_n + T_n^p \vec{e}_p + T_n^1 \vec{e}_1 + \lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha$, назовем *прямой Тренсона гиперполосы* SH_m.

Нормаль Тренсона для произвольного Δ-распределения на регулярной гиперполосе $H_m \in A_n$ была введена И. Е. Лисицыной [3]. Нормализация Тренсона для касательно r-оснащенных $H_m(A)$ рассмотрена в [9]. Нормаль Тренсона 1-го рода SH_m в каждой $A \in V_m$ имеет вид $N_{n-m}(A) = [A, \vec{e}_\alpha, \vec{T}_n]$.

3. Рассмотрим прямую $[A, \vec{A}_n]$, где $\vec{A}_n = \vec{e}_n + A_n^p \vec{e}_p + A_n^1 \vec{e}_1 + \lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha$.

Учитывая (1), (22), получаем $\delta\vec{A}_n = \pi_n^n \vec{A}_n$. Итак, прямая $A_1 = \left\lfloor A, \vec{A}_n \right\rfloor$ есть инвариантная прямая, внутренним образом присоединенная к SH_m во второй дифференциальной окрестности. A_1 назовем *аффинной прямой* Δ-подрасслоения (или Δ^*-подрасслоения) в точке A.

Соответственно плоскость $A_{n-m+1} = [A, \vec{e}_1, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n]$ назовем *аффинной нормалью* Δ-подрасслоения в точке A, а плоскость $A_{n-m} = [A, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n]$ — аффинной Δ-виртуальной нормалью гиперполосы SH_m.

Из формул (20), (21) находим соотношения:

$$B_n^1 = -\frac{1}{m+2} b_{11}^{kj} b_{jk1}^n b_n^{11} = -\frac{1}{m+2} b_n^{11} b_{111}^n b_n^{11} - \frac{1}{m+2} b_n^{pq} b_{pq1}^n b_n^{11} =$$

$$= \frac{3}{m+2} T_n^1 + \frac{m-1}{m+2} A_n^1 = A_n^1 - \frac{3}{m+2} A_n^1 + \frac{3}{m+2} T_n^1 =$$

$$= A_n^1 + \frac{3}{m+2}\left(T_n^1 - A_n^1\right) = T_n^1 + \frac{m-1}{m+2}\left(A_n^1 - T_n^1\right). \qquad (25)$$

$$B_n^p = -\frac{1}{m+2} b_n^{kj} b_{jkn}^n b_n^{hp} = -\frac{1}{m+2} b_n^{11} b_{11q}^n b_n^{qp} - \frac{1}{m+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp} = \frac{1}{m+2} A_n^p + \frac{m+1}{m+2} T_n^p =$$

$$= T_n^p + \frac{1}{m+2}\left(A_n^p - T_n^p\right) = A_n^p + \frac{m+1}{m+2}\left(T_n^p - A_n^p\right). \qquad (26)$$

Из (25), (26) следует, что компоненты $\{B_n^i\} = \{B_n^1, B_n^p\}$ — линейные комбинации компонент $\{A_n^i\}$ и $\{T_n^i\}$. В результате получаем предложения.

Теорема 3. *Аффинные нормали 1-го рода прямой* $L(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta^*(A)$ *в каждой точке* $A \in V_m$ *базисной поверхности гиперполосы* SH_m *образуют однопараметрический пучок гиперплоскостей, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^1(\varepsilon) = A_n^1 + \varepsilon(T_n^1 - A_n^1), \qquad (27)$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-1}(A)$ высекается из пучка (27) при $\varepsilon = \dfrac{3}{m+2}$.

Теорема 4. *Нормали 1-го рода* $N_{n-m+1}(A)$ *плоскости Δ(A) в каждой* $A \in V_m$ *образуют однопараметрический пучок, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^p(\gamma) = T_n^p + \gamma(A_n^p - T_n^p), \qquad (28)$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-m+1}(A)$ плоскости Δ(A) соответствует $\gamma = \dfrac{1}{m+2}$.

Как следствие из теорем 3 и 4 вытекает

Теорема 5. *Нормали 1-го рода Бляшке* $B_{n-m}(A)$, *Тренсона* $T_{n-m}(A)$ *и аффинная* Δ*-виртуальная нормаль* $A_{n-m}(A)$ *гиперполосы* SH_m *в каждой* $A\in V_m$ *принадлежат одному однопараметрическому пучку, определяемому пучком*

$$N_n^i(\eta)=T_n^i+\eta(A_n^i-T_n^i). \qquad (29)$$

Если нормаль Тренсона $T_{n-m}(A)$ и аффинная Δ-виртуальная нормаль $A_{n-m}(A)$ гиперполосы SH_m в $A\in V_m$ совпадают, то, как следует из (25) и (26), нормаль Тренсона $T_{n-m}(A)$ совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$, то есть все 3 нормали совпадают. Действительно, из (25) и (26):

$$((T_n^1=A_n^1;T_n^p=A_n^p)\Leftrightarrow(T_n^1=B_n^1;B_n^p=A_n^p))\Rightarrow(T_n^1=A_n^1=B_n^1;T_n^p=A_n^p=B_n^p)\Rightarrow T_n^i=B_n^i=A_n^i.$$

Аналогично можно показать, что при совпадении любых 2 нормалей SH_m из указанных 3 в данной точке $A\in V_m\in SH_m$ все 3 совпадают.

Определение 3. SH_m назовем *коинциндентной* [11], если пучок ее нормалей (29) в каждой ее точке $A\in V_m$ вырождается в одну нормаль.

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Гиперполоса* SH_m *коинциндентна тогда и только тогда, когда любые две ее нормали из трех* $A_{n-m}(A), B_{n-m}(A), T_{n-m}(A)$ *совпадают.*

4. Введем соответствие между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосы SH_m [8] по формулам:

$$\nu_i=b_{is}^n\nu_n^s+b_i,\quad \nabla\nu_i=\nu_{is}\omega^s, \qquad (30)$$

где $b_p=b_{11p}^n b_n^{11}$, $b_1=\dfrac{1}{3}b_{111}^n b_n^{11}$, $b_i=\{b_p;b_i\}, \nabla b_i=b_{ij}^n\omega_n^j+b_{ij}\omega^j$.

Поле ν_i, как следует из (30) и условий инвариантности объектов [8], задает поле $(m-1)$ плоскостей N_{m-1} — поле нормалей 2-го рода SH_m.

Уравнения (30) распишем на две группы $(i=p;1)$ уравнений, ассоциированных соответственно с Δ-, Δ^*-подрасслоениями:

$$\nu_p=b_{pq}^n\nu_n^q+b_p,\quad \nabla\nu_p=\nu_{pi}\omega^i, \qquad (31)$$

$$\nu_1=b_{11}^n\nu_n^1+b_1,\quad \nabla\nu_1=\nu_{1i}\omega^i. \qquad (32)$$

Разрешив уравнения (30) относительно ν_n^s, получим:

$$\nu_n^i=\nu_j b_n^{ij}-b_j b_n^{ij}=\nu_j b_n^{ij}-b_n^i. \qquad (33)$$

Таким образом, при помощи (30), (33) мы устанавливаем биекцию между нормалями 1-го и 2-го рода SH_m. Это соответствие — обобщение для гиперполос SH_m аффинного пространства соответствия Бомпьяни — Пантази [12]. Биекция (30) индуцирует соответственно биекции (31), (32) между нормалями 1-го и 2-го рода Δ-, Δ^*-подрасслоений.

Аналогично, с помощью величин $\{B_j\}$, где

$$B_1=b_{pq1}^n b_n^{pq},\ B_p=b_{sqp}^n b_n^{qs},\ \nabla B_1=b_{11}^n\omega_n^1,\ \nabla B_p=b_{ps}^n\omega_n^s+B_{pi}\omega^i,$$

устанавливаем еще одно соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосы SH_m:

$$\mu_1 = b^n_{is}\omega^s_n + B_i, \quad \nabla\mu_i = \nu_{ik}\omega^k, \tag{34}$$

которое в свою очередь порождает биекции между нормалями 1-го и 2-го рода соответственно Δ-, Δ^*-подрасслоений следующего вида:

$$\mu_1 = b^n_{11}\nu^1_n + B_1 \quad \nabla\mu_1 = \mu_{1i}\omega^i, \tag{35}$$

$$\mu_p = b^n_{pq}\nu^q_n + B_p, \quad \nabla\mu_p = \mu_{pi}\omega^i. \tag{36}$$

Пучку нормалей 1-го рода $N^i_n(\eta)$ (29) гиперполосы SH_m в дифференциальной окрестности 2-го порядка соответствуют два пучка нормалей 2-го рода, определяемых бисекциями (31), (36):

$$\phi_i(\eta) = b^n_{is}N^s_n(\eta) + B_i, \ \psi_i(\eta) = b^n_{is}N^s_n(\eta) + b_i.$$

Каждый из пучков (3), (4) в силу соответственно биекций (31), (36) и (32), (35) задает пучки нормалей 2-го рода Δ-, Δ^*-подрасслоений:

$$\phi_p(\gamma) = b^n_{pq}N^q_n(\gamma) + B_p, \ \psi_p(\gamma) = b^n_{pq}N^q_n(\gamma) + b_p, \ \phi_1(\varepsilon) = b^n_{11}N^1_n(\varepsilon) + B_1, \ \psi_1(\varepsilon) = b^n_{11}N^1_n(\varepsilon) + b_1.$$

В результате справедлива

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка SH_m порождает 2 пучка ее внутренних нормализаций $(N^i_n(\eta); \phi_i(\eta))$, $(N^i_n(\eta); \psi_i(\eta))$ в смысле Нордена-Чакмазяна [8] – [10] и по 2 пучка $(N^p_n(\gamma); \phi_p(\gamma))$, $(N^p_n(\gamma); \psi_p(\gamma))$ и $(N^1_n(\varepsilon); \phi_1(\varepsilon))$, $(N^1_n(\varepsilon); \psi_1(\varepsilon))$ внутренних нормализаций соответственно Δ-, Δ^*-подрасслоений.*

4. Нормализация Фосса — Грина гиперполосы SH_m

1. Определение 4. Точка M, принадлежащая плоскости $\Delta(A)$, называется *фокальной точкой* плоскости $\Delta(A)$, соответствующей направлению $\Delta^*(A) \overset{\text{def}}{=} L(A)$, если она не выходит из $\Delta(A)$ при инфинитезимальном смещении точки A в направлении $L(A)$. Направление $L(A)$ называют *фокальным направлением, соответствующим фокальной точке M.*

Зададим произвольную точку M плоскости $\Delta(A)$: $\vec{M} = \vec{A} + x^p\vec{e}_p$. Если M фокальна, то $dM \in \Delta(A)$ и $\omega^p = 0$, так как направление смещения принадлежит $L(A)$: $dM|_{\omega^p=0} = (dx^p + x^q\omega^p_q)\vec{e}_p + (\omega^1 + x^p\lambda^1_{p1}\omega^1)\vec{e}_1$. Отсюда (в силу определения)

$$\omega^1(\delta^1_1 + x^p\lambda^1_{p1}) = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0. \tag{37}$$

Итак, координаты фокальной точки M должны удовлетворять уравнениям (37), выражающим существование нетривиального решения системы (37). Множество всех фокальных точек называется *фокальной поверхностью*. Уравнения фокальной поверхности плоскости $\Delta(A)$ в локальном репере:

$$1 + x^p \lambda^1_{p1} = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0, \tag{38}$$

а фокальное направление, соответствующее точке $\vec{M} = \vec{A} + x^p \vec{e}_p$, определяется системой (37). Таким образом, все фокальные точки плоскости $\Delta(A_0)$ принадлежат $(m-2)$-мерной плоскости (38).

Аналогично получаем, что координаты фокальной точки прямой $L(A_0)$ (элементов Δ^*-подрасслоения) при смещении точки A_0 вдоль кривых, принадлежащих Δ-подрасслоению, удовлетворяют уравнению

$$\det\left\|\delta^p_q + x^1 \lambda^p_{1q}\right\| = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0. \tag{39}$$

Фокальное направление, соответствующее точке $\vec{M} = \vec{A}_0 + x^p \vec{e}_p$ прямой $L(A_0)$, определяется системой уравнений

$$\omega^p + x^1 \lambda^p_{1q} \omega^q = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0. \tag{40}$$

2. Найдем линейную поляру A_0 [5] относительно поверхности (38):

$$1 + x^p G_p = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0, \tag{41}$$

$$G_p \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^1_{p1}, \quad \nabla G_p = G_{pi} \omega^i. \tag{42}$$

Следуя работе [5], найдем аналогично полюс G_0 точки A_0 относительно фокальных точек прямой $L(A_0)$ (40):

$$(G_0): \quad 1 + x^1 G_1 = 0; \quad x^1 = x^\alpha = x^n = 0, \tag{43}$$

$$G_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m-1} \lambda^p_{1p}, \quad \nabla G_1 = G_{1i} \omega^i. \tag{44}$$

При обращения $\{G_p\}$ и $\{G_1\}$ в нуль плоскость G_{m-2} (41) и точка G_0 (43) становятся несобственными элементами соответственно $\Delta(A_0)$ и $L(A_0)$.

3. Рассмотрим плоскость, проходящую через $(m-2)$-плоскость $G_{m-2}(A_0)$ и точку G_0, определяемую в локальном репере уравнениями

$$G_{m-1}(A_0): \quad 1 + x^1 G_1 + x^p G_p = 0; \quad x^\alpha = x^n = 0. \tag{45}$$

Согласно [14], [15] плоскость $G_{m-1}(A_0)$ будем называть *ребром Грина* сопряженной системы $S(\Delta, \Delta^*)$. Ребро Грина $G_{m-1}(A_0)$ — это нормаль 2-го рода в точке A_0 гиперполосы SH_m. Таким образом, доказана

Теорема 8. *Поле нормалей 2-го рода гиперполосы SH_m — это поле ребер Грина, заданное системой уравнений (42), (44), внутренним образом определено в дифференциальной окрестности 2-го порядка.*

4. Введем в рассмотрение прямую $\Phi_1 = [A_0, \vec{\Phi}_n]$, внутренним образом присоединенную к гиперполосе SH_m в дифференциальной окрестности 2-го порядка, которую зададим вектором

$$\vec{\Phi}_n = \vec{e}_n + \lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha + \Phi_n^1 \vec{e}_1 + \Phi_n^p \vec{e}_p,$$

$$\begin{cases} \Phi_n^1 = \dfrac{1}{m-1} b_n^{pq} \lambda_{pq}^1, & \nabla \Phi_n^1 + \omega_n^1 = \Phi_{ni}^1 \omega^i, \\ \Phi_n^p = b_n^{11} \lambda_{11}^p, & \nabla \Phi_n^p + \omega_n^p = \Phi_{ni}^p \omega^i. \end{cases} \quad (46)$$

Прямую Φ_1 назовем *прямой Фосса* [13], ассоциированной с двухкомпонентной сопряженной системой $S(\Delta;\Delta^*)$.

Определение 5. Плоскость $\Phi_{n-m} = [A_0, \vec{\Phi}_1; X_{n-m-1}(A_\nu)]$, натянутую на прямую Фосса Φ_1 и характеристику $X_{n-m-1}(A_0)$, назовем *нормалью Фосса 1-го рода* гиперполосы SH_m, порожденной сопряженной системой $S(\Delta,\Delta^*)$.

В результате имеет место

Теорема 9. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним образом присоединяется нормализация* $(\Phi;G)$ *в смысле Нордена — Чакмазяна гиперполосы* SH_m, *полем нормалей 1-го рода которой является поле нормалей Фосса (46), а полем номалей 2-го рода — поле ребер Грина (42), (44).*

Найдем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик [7] SH_m

$$b_{pq}^n x^p x^q + b_{11}^n x^1 x^1 + 2A_p x^p x^n + 2A_1 x^1 x^n + L_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + T_0 \left(x^n\right)^2 + 2l_\alpha x^\alpha x^n - 2x^n = 0, \quad (47)$$

относительно которых в каждой A_0 поверхности V_m ребро $G_{m-1}(A_0)$ и нормаль $\Phi_{n-m}(A_0)$ 1-го рода SH_m полярно сопряжены. В силу сопряженности Φ_{n-m} и G_{m-1} относительно поля гиперквадрик (47) найдем

$$A_p = -G_p - b_{pq}^n \Phi_n^1, \quad A_1 = -G_1 - b_{11}^n \Phi_n^1. \quad (48)$$

Учитывая охваты (48) в формуле (47), получаем предложение.

Теорема 10. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка, внутренним образом присоединяется к* SH_m *поле соприкасающихся гиперквадрик*

$$b_p^n q x^p x^q + b_{11}^n x^1 x^1 - 2(G_p + b_{pq}^n \Phi_n^1) x^p x^n - 2(G_1 + b_{11}^n \Phi_n^1) x^1 x^n +$$

$$+ L_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + T_0 (x^n)^2 + 2l_\alpha x^\alpha x^n - 2x^n = 0,$$

относительно которых поля нормалей Фосса и ребер Грина полярно сопряжены.

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып. 8. С. 197—272.

2. *Акивис М. А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.

3. *Лисицына И. Е.* Нормализация Тренсона гиперполосы H_m аффинного пространства // Диф. геометрия многообр. фигур. Калининград, 1998. Вып. 29. С. 38—40.

4. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

5. *Столяров А. В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. высших учебных заведений. Математика. 1975. №10. С. 97—99.

6. *Остиану Н. М., Рыжков В. В., Швейкин П. И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лапшева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

7. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм : учебное пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1978. Ч. 1. 1980. Ч. 2.

8. *Попов Ю. И.* Регулярные гиперполосы аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2011.

9. *Попов Ю. И.* Нормализация Тренсона гиперполосы $H_m(\lambda)$ // Диф. геометрия многообр. фигур. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 117—122.

10. *Попов Ю. И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т, 1988. Деп. в ВИНИТИ, 1988. 6 807—887 Деп.

11. *Mihailescu T.* Geometric differential projective. Bcuresti Aicd RPR, 1958.

12. *Алшибая Э. Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : учебное пособие. Тбилиси, 1999.

13. *Акивис М. А.* О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий // Мат. сборник. 1962. Т. 58, №2. С. 695—706.

14. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

15. *Юрьева С. Н.* Нормализация Фосса — Грина гиперполосы $H_M(\Lambda)$ // Диф. геометрия многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 160—165.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: matsievsky@newmail. ru.

Author

Dr Juriy Popov — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: matsievsky@newmail. ru.