УДК 514.76

Л. А. Лукичева

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары)

ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ В НОРМАЛИЗОВАННОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Путем расширения риманова пространства V_n до пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n,n} \equiv V_n^*$ показано, что невырожденная его нормализация индуцирует три пространства проективной связности $\overset{2-4}{P}_{n,n}$.

Ключевые слова: расширенное риманово пространство, нормализация, тензор, структурные уравнения, пространство проективной связности, кручение.

Результаты работы получены с использованием инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований [1; 3; 5]. Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n}\,;\; I, K, L, \ldots = \overline{1,n}\,.$$

1. Рассмотрим риманово пространство V_n, которое определяется системой форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$ и полем симметричного невырожденного тензора g_{IK} ($g_{[IK]} = 0$, $|g_{IK}| \neq 0$):

$$D\theta^I = \theta^L \wedge \theta^I_L\,,\; D\theta^I_K = \theta^L_K \wedge \theta^I_L + \frac{1}{2} r^I_{KPQ} \theta^P \wedge \theta^Q\,; \tag{1}$$

$$\nabla g_{IK} \equiv dg_{IK} - g_{IL}\theta^L_K - g_{LK}\theta^L_I = 0\,. \tag{2}$$

Возьмем систему форм Пфаффа $\{\omega^{\bar{I}}_{\bar{K}}\}$:

$$\omega_0^I = \theta^I,\ \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_L^L,\ \omega_K^0 = 0,\ \omega_K^I = \theta_K^I - \frac{1}{n+1}\delta_K^I\theta_L^L. \quad (3)$$

Система (3) в силу (1) удовлетворяет уравнениям Картана — Лаптева [1]:

$$D\omega_0^I = \omega_0^L \wedge \left(\omega_L^I - \delta_L^I\omega_0^0\right),\ D\omega_0^0 = 0,$$

$$D\omega_K^0 = 0,\ D\omega_K^I = \omega_K^L \wedge \omega_L^I + \frac{1}{2}R_{KPQ}^I\omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad (4)$$

$$dg_{IK} + 2g_{IK}\omega_0^0 - g_{IL}\omega_K^L - g_{LK}\omega_I^L = 0;$$

где

$$R_{0PQ}^I = R_{KPQ}^0 = R_{0PQ}^0 = 0,\ R_{KPQ}^I = r_{KPQ}^I. \quad (5)$$

Следовательно, система форм Пфаффа (3) определяет пространство проективной связности $\overset{1}{P}_{n,n}$ без кручения со структурными уравнениями (4), которое назовем расширенным римановым пространством и обозначим V_n^*; метрическим тензором этого пространства будет симметричный тензор g_{IK}.

2. Пусть в пространстве V_n^* задано поле ковектора ν_I^0:

$$\nabla\nu_{\bar{I}}^0 \equiv d\nu_{\bar{I}}^0 + \nu_{\bar{I}}^0\omega_0^0 - \nu_{\bar{K}}^0\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \nu_{IK}^0\omega_0^K. \quad (6)$$

Предположим, что компонента ν_0^0 этого тензора отлична от нуля: геометрически это означает, что в каждом слое $E_n^*(A_0)$ выбрана гиперплоскость $\xi_0(A_0)$, не проходящая через точку A_0. Поэтому, следуя [3], пространство V_n^* с введенной структурой по аналогии с проективным пространством P_n назовем нормализованным; при таком оснащении расширенного пространства V_n^* исходное риманово пространство V_n также назовем нормализованным.

Считая $\nu_0^0 = -1$, из уравнений (6) находим:

$$\nabla\nu_I^0 = \nu_{IK}^0\omega_0^K. \quad (7)$$

Обращение тензора ν_I^0 в нуль равносильно тому, что нормализующая гиперплоскость $\xi_0(A_0) \equiv [A_I + \nu_I^0 A_0]$ совпадает с несобственной гиперплоскостью $\Pi_{n-1}(A_0) \equiv [A_I]$; поэтому везде, где не оговорено, предполагается, что тензор ν_I^0 — не нулевой. Продолжая уравнения (7), получим:

$$\nabla \nu_{IK}^0 + \nu_{IK}^0 \omega_0^0 = \nu_{IKL}^0 \omega_0^L . \quad (8)$$

Согласно (7) и (8), система функций

$$\mu_{IK}^0 \overset{def}{=} \nu_{IK}^0 - \nu_I^0 \nu_K^0 , \quad (9)$$

образует тензор:

$$\nabla \mu_{IK}^0 + \mu_{IK}^0 \omega_0^0 = \mu_{IKL}^0 \omega_0^L ; \quad (10)$$

$$\nabla \mu_{IKL}^0 + 2\mu_{IKL}^0 \omega_0^0 = \mu_{IKLP}^0 \omega_0^P , \quad (11)$$

где

$$\mu_{IKL}^0 = \nu_{IKL}^0 - \nu_I^0 \nu_{KL}^0 - \nu_K^0 \nu_{IL}^0 ;$$

тензор μ_{IK}^0 назовем основным тензором нормализации пространства V_n^*.

Нормализацию пространства V_n^* с симметричным тензором μ_{IK}^0 по аналогии с нормализованным пространством P_n [3] назовем гармонической.

Предположим, что соответствие $A_0 \to \xi_0(A_0)$ — взаимно однозначно; последнее равносильно тому, что тензор μ_{IK}^0 является невырожденным: $h \overset{def}{=} \left| \mu_{IK}^0 \right| \neq 0$. Следовательно, в случае невырожденной нормализации пространства V_n^* существует поле взаимного тензора μ_0^{IK}, компоненты которого определяются из соотношений

$$\mu_{IL}^0 \mu_0^{LK} = \delta_I^K , \ \mu_{LI}^0 \mu_0^{KL} = \delta_I^K \quad (12)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\mu_0^{IK} - \mu_0^{IK}\omega_0^0 + \mu_0^{IP}\mu_0^{QK}\mu_{PQL}^0\omega_0^L = 0\,. \qquad (13)$$

Функция h есть относительный инвариант и в силу (10, 12, 13) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\ln h + 2(n+1)\omega_0^0 = h_K\omega_0^K\,, \qquad (14)$$

где

$$h_K = \mu_0^{LI}\mu_{ILK}^0\,. \qquad (15)$$

Продолжая уравнения (14), получим:

$$\nabla h_K + h_K\omega_0^0 = h_{KL}\omega_0^L\,, \qquad (16)$$

где в силу (5) справедливо

$$h_{[KL]} = 0\,. \qquad (17)$$

Согласно уравнениям (7) и (16), система функций

$$\Lambda_K = h_K - 2(n+1)\nu_K^0 \qquad (18)$$

образует тензор:

$$\nabla\Lambda_K + \Lambda_K\omega_0^0 = \Lambda_{KL}\omega_0^L\,,\ \Lambda_{[KL]} = -2(n+1)\mu_{[KL]}^0\,. \qquad (19)$$

Тензор Λ_K есть аналог чебышевского вектора [3]; при этом нормализация пространства V_n^* необязательно гармоническая.

Системы функций

$$M_{IKL}^0 \overset{def}{=} \mu_{IKL}^0 - \nu_I^0\mu_{LK}^0 - \nu_K^0\mu_{IL}^0 - \frac{h_L}{n+1}\mu_{IK}^0\,; \qquad (20)$$

$$N_{IKL}^0 \overset{def}{=} M_{IKL}^0 - \frac{1}{n(n+1)}\mu_{IK}^0\Lambda_L \qquad (21)$$

в силу уравнений (7, 10, 11, 16, 19) образуют тензоры:

$$\nabla M_{IKL}^0 + 2M_{IKL}^0\omega_0^0 = M_{IKLP}^0\omega_0^P\,, \nabla N_{IKL}^0 + 2N_{IKL}^0\omega_0^0 = N_{IKLP}^0\omega_0^P\,. \qquad (22)$$

3. Согласно [2] на базе пространства $\overset{1}{P}_{n,n} \equiv V_n^*$ другое пространство проективной связности можно определить при по-

мощи новых $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\Omega_{\bar{K}}^{\bar{I}}$, которые получаются из форм $\omega_{\bar{K}}^{\bar{I}}$ преобразованием

$$\Omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} = \omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} + \Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} \omega_0^L . \tag{23}$$

Формы $\Omega_{\bar{K}}^{\bar{I}}$ в силу (4) удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$D\Omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} = \Omega_{\bar{K}}^{\bar{L}} \wedge \Omega_{\bar{L}}^{\bar{I}} + \Delta\Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} \wedge \omega_0^L , \tag{24}$$

где

$$\Delta\Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} = \nabla\Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} + \Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} \omega_0^0 - \frac{1}{2}\left(R_{\bar{K}LP}^{\bar{I}} + 2\Pi_{\bar{Q}L}^{\bar{I}} \Pi_{\bar{K}P}^{\bar{Q}} \right)\omega_0^P . \tag{25}$$

Согласно теореме Картана — Лаптева из уравнений (24) следует, что для того, чтобы в главном расслоенном многообразии, задаваемом формами ω_0^I, $\Omega_{\bar{K}}^{\bar{I}}$, определялась проективная связность, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта $\Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}}$, то есть

$$\Delta\Pi_{\bar{K}L}^{\bar{I}} = \tilde{\Pi}_{\bar{K}LP}^{\bar{I}} \omega_0^P ; \tag{26}$$

при этом совокупность функций $\left(-2\tilde{\Pi}_{\bar{K}[PQ]}^{\bar{I}}\right)$ есть тензор кривизны -кручения соответствующего пространства проективной связности.

Уравнения (26) с учетом (25) равносильны системе (с учетом $\omega_I^0 = 0$, см. (3))

$$\nabla\Pi_{0K}^I + \Pi_{0K}^I \omega_0^0 = \Pi_{0KP}^I \omega_0^P , \ \nabla\Pi_{KL}^I + \Pi_{KL}^I \omega_0^0 = \Pi_{KLP}^I \omega_0^P ,$$
$$\nabla\Pi_{IK}^0 + \Pi_{IK}^0 \omega_0^0 = \Pi_{IKP}^0 \omega_0^P . \tag{27}$$

В силу соотношений (7, 13, 15, 18 — 22) очевидно, что каждая из следующих трех систем охватов удовлетворяет уравнениям (27):

$$\Pi_{0K}^0 = -\frac{\Lambda_K}{n+1} , \ \Pi_{IK}^L = \mu_0^{LP} M_{PIK}^0 ,$$
$$\Pi_{IK}^0 = -2\mu_{[IK]}^0 + \nu_I^0 \frac{\Lambda_K}{n+1} + \mu_0^{LP} \nu_L^0 M_{PIK}^0 ; \tag{28}$$

$$\Pi^0_{0K} = 0\,,\ \Pi^L_{IK} = \mu^{LP}_0 N^0_{PIK}\,,\ \Pi^0_{IK} = -2\mu^0_{[IK]} + \mu^{LP}_0 \nu^0_L N^0_{PIK}\,; \qquad (29)$$

$$\Pi^0_{0K} = -\frac{\Lambda_K}{n+1},\ \Pi^L_{IK} = \delta^L_I \frac{\Lambda_K}{n+1},\ \Pi^0_{IK} = \frac{1}{n}\nu^0_I \Lambda_K\,. \qquad (30)$$

Формы $\Omega^{\bar I}_{\bar K}$ с охватами (28 — 30) обозначим (соответственно) $\overset{2}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K}$, $\overset{3}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K}$, $\overset{4}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K}$ ($\overset{1}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K} = \omega^{\bar I}_{\bar K}$). Соответствующие пространства проективной связности обозначим через $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$. Следовательно, формы новых пространств с формами $\omega^{\bar I}_{\bar K}$ исходного нормализованного расширенного риманова пространства V^*_n связаны соотношениями:

$$\overset{2}{\omega}{}^I_0 = \omega^I_0\,,\ \overset{2}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{\Lambda_P}{n+1}\omega^P_0\,,\ \overset{2}{\omega}{}^I_K = \omega^I_K + \mu^{IL}_0 M^0_{LKP}\omega^P_0\,,$$
$$\overset{2}{\omega}{}^0_I = \left(\nu^0_I \frac{\Lambda_P}{n+1} + \mu^{KL}_0 \nu^0_K M^0_{LIP} - 2\mu^0_{[IP]}\right)\omega^P_0\,; \qquad (31)$$

$$\overset{3}{\omega}{}^I_0 = \omega^I_0\,,\ \overset{3}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0\,,\ \overset{3}{\omega}{}^I_K = \omega^I_K + \mu^{IL}_0 N^0_{LKP}\omega^P_0\,,$$
$$\overset{3}{\omega}{}^0_I = \left(\mu^{KL}_0 \nu^0_K N^0_{LIP} - 2\mu^0_{[IP]}\right)\omega^P_0\,; \qquad (33)$$

$$\overset{4}{\omega}{}^I_0 = \omega^I_0\,,\ \overset{4}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{\Lambda_P}{n+1}\omega^P_0\,,\ \overset{4}{\omega}{}^I_K = \omega^I_K + \delta^L_K \frac{\Lambda_P}{n(n+1)}\omega^P_0\,,$$
$$\overset{4}{\omega}{}^0_I = \frac{1}{n}\nu^0_I \Lambda_P \omega^P_0\,. \qquad (32)$$

Формы $\overset{q}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K}$ $(q = 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\overset{q}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar K} = \overset{q}{\omega}{}^{\bar L}_{\bar K} \wedge \overset{q}{\omega}{}^{\bar I}_{\bar L} + \frac{1}{2}\overset{q}{R}{}^{\bar I}_{\bar K PQ}\,\omega^P \wedge \omega^Q\,, \qquad (34)$$

где тензоры кривизны-кручения $\overset{2}{R}{}^{\bar I}_{\bar K PQ}$, $\overset{3}{R}{}^{\bar I}_{\bar K PQ}$, $\overset{4}{R}{}^{\bar I}_{\bar K PQ}$ пространств $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ в силу (4, 5, 9, 17, 31 — 33) имеют следующие строения:

$$\overset{2}{R}{}^{I}_{0PQ}=-\mu^{IL}_{0}\nu^{0}_{K}R^{K}_{LPQ},\ \overset{2}{R}{}^{0}_{0PQ}=\nu^{0}_{K}\overset{2}{R}{}^{K}_{0PQ},\ \overset{2}{R}{}^{0}_{IPQ}=\nu^{0}_{K}\overset{2}{R}{}^{K}_{IPQ},$$

$$\overset{2}{R}{}^{I}_{KPQ}=-\nu^{0}_{K}\overset{2}{R}{}^{I}_{0PQ}-\mu^{IL}_{0}\mu^{0}_{TK}R^{T}_{LPQ}; \tag{35}$$

$$\overset{3}{R}{}^{I}_{0PQ}=\overset{2}{R}{}^{I}_{0PQ}+\frac{2}{n}\delta^{I}_{[P}\Lambda_{Q]},\ \overset{3}{R}{}^{I}_{KPQ}=\overset{2}{R}{}^{I}_{KPQ}-\nu^{0}_{K}\frac{2}{n}\delta^{I}_{[P}\Lambda_{Q]}-\frac{4}{n}\delta^{I}_{K}\mu^{0}_{[PQ]},$$

$$\begin{gathered}\overset{3}{R}{}^{0}_{0PQ}=4\mu^{0}_{[PQ]}+\nu^{0}_{L}\overset{2}{R}{}^{L}_{0PQ}+\frac{2}{n}\nu^{0}_{[P}\Lambda_{Q]},\\ \overset{3}{R}{}^{0}_{IPQ}=\nu^{0}_{K}\overset{3}{R}{}^{K}_{IPQ}+\mu^{0}_{IK}\frac{2}{n}\Lambda_{[P}\delta^{K}_{Q]}-4\nu^{0}_{I}\mu^{0}_{[PQ]};\end{gathered} \tag{36}$$

$$\overset{4}{R}{}^{I}_{0PQ}=\frac{2}{n}\Lambda_{[P}\delta^{I}_{Q]},\ \overset{4}{R}{}^{0}_{0PQ}=-4\mu^{0}_{[PQ]}-\frac{2}{n}\nu^{0}_{[P}\Lambda_{Q]},$$

$$\begin{gathered}\overset{4}{R}{}^{I}_{KPQ}=\frac{4}{n}\delta^{I}_{K}\mu^{0}_{[PQ]}+R^{I}_{KPQ}-\frac{2}{n}\nu^{0}_{K}\Lambda_{[P}\delta^{I}_{Q]},\\ \overset{4}{R}{}^{0}_{IPQ}=\frac{2}{n}\left(\mu^{0}_{I[P}\Lambda_{Q]}+\nu^{0}_{I}\nu^{0}_{[P}\Lambda_{Q]}\right)+\frac{4(n+1)}{n}\nu^{0}_{I}\mu^{0}_{[PQ]}.\end{gathered} \tag{37}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При невырожденной нормализации риманова пространства V_n индуцируются три нормализованные пространства проективной связности $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$, базой которых служит база исходного пространства V_n, причем формы связности и тензоры кривизны-кручения индуцированных пространств имеют соответственно строения (31 — 33) и (35 — 37).*

Из соотношений (35 — 37) непосредственно следует $\overset{2}{R}{}^{I}_{0PQ}=\overset{3}{R}{}^{I}_{0PQ}+\overset{4}{R}{}^{I}_{0PQ}$, то есть справедливо

Следствие. *Если из трех пространств проективной связности $\overset{2-4}{P}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной нормализацией* *риманова пространства V_n, два пространства имеют нулевое кручение, то и третье — без кручения.*

Следующее утверждение сформулируем без доказательства:

Теорема 2. *В случае невырожденной гармонической нормализации риманова пространства V_n справедливо $\overset{3}{P}_{n,n} \equiv \overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n} \equiv V_n^*$. Если при этом пространство $\overset{2}{P}_{n,n}$ имеет нулевое кручение ($\Leftrightarrow \nu_L^0 R_{KPQ}^L = 0$, см. (34)), то $\overset{2}{R}{}_{0PQ}^K = \overset{2}{R}{}_{0PQ}^0 = \overset{2}{R}{}_{IPQ}^0 = 0$, $\overset{2}{R}{}_{IPQ}^K = -\mu_0^{KL}\mu_{TI}^0 R_{LPQ}^T$, причем в случае обращения в нуль тензора M_{IKL}^0 пространство $\overset{2}{P}_{n,n}$ вырождается в расширенное риманово пространство, изоморфное V_n^*.*

Из соотношений (5) следует, что риманово пространство V_n вырождается ($r_{KPQ}^I \equiv 0$) в евклидово пространство E_n тогда и только тогда, когда расширенное пространство V_n^* вырождается ($R_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}} \equiv 0$) в расширенное евклидово пространство E_n^*. Так как согласно (35) справедливо $R_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}} \equiv 0 \Leftrightarrow \overset{2}{R}{}_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}} \equiv 0$, то имеем $V_n^* \equiv E_n^* \Leftrightarrow \overset{2}{P}_{n,n} \equiv \overset{2}{P}_n$; при этом пространства $\overset{3}{P}_{n,n}$ и $\overset{4}{P}_{n,n}$ необязательно вырождаются в проективные пространства, ибо в силу (36) и (37) имеют место соотношения $\overset{4}{R}{}_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}} = -\overset{3}{R}{}_{\bar{K}PQ}^{\bar{I}}$, где

$$\overset{3}{R}{}_{0PQ}^I = \frac{2}{n}\delta_{[P}^I \Lambda_{Q]},\ \overset{3}{R}{}_{0PQ}^0 = 4\mu_{[PQ]}^0 + \frac{2}{n}\nu_{[P}^0 \Lambda_{Q]},$$

$$\overset{3}{R}{}_{KPQ}^I = -\frac{2}{n}\left(\nu_K^0 \delta_{[P}^I \Lambda_{Q]} + 2\delta_K^I \mu_{[PQ]}^0\right),$$

$$\overset{3}{R}{}^{0}_{KPQ} = -\frac{2}{n}\left[\mu^{0}_{K[P}\Lambda_{Q]} + \nu^{0}_{K}\nu^{0}_{[P}\Lambda_{Q]} + 2(n+1)\nu^{0}_{K}\mu^{0}_{[PQ]}\right].$$

Последние соотношения в силу $\mu^{0}_{[PQ]} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_K = 0$ доказывают следующее предложение:

Теорема 3. *При невырожденной нормализации евклидова пространства E_n пространство $\overset{2}{P}_{n,n}$ является плоским, а пространство $\overset{3}{P}_{n,n}$ (или $\overset{4}{P}_{n,n}$) плоское тогда и только тогда, когда нормализация E_n гармоническая.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.
2. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Труды 4-го Всесоюзн. матем. съезда (1961): сб. науч. тр. Л., 1964. Т. 2. С. 226—233.
3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
4. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.
5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

L. Lukicheva

PROJECTIVE CONNECTIONS IN NORMALIZED RIEMANNIAN SPACE

In work by expansion Riemannian space V_n to space of projective connectivity $\overset{1}{P}_{n,n} \equiv V_n^*$ it is shown, that its nondegenerate normalization induces three spaces of projective connection $\overset{2-4}{P}_{n,n}$.