УДК 514.75

А.В. Вялова

*(Российский государственный университет
им. Иммануила Канта)*

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ ПЛОСКОСТИ БОРТОЛОТТИ ВДОЛЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПЛОСКИХ ОБРАЗУЮЩИХ ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается плоскостная поверхность как r-мерное семейство B_r плоских образующих L_h. Осуществляется оснащение Бортолотти плоскостной поверхности, которое состоит в присоединении к каждой образующей L_h проективно дополнительной плоскости P_{n-h-1}. Путем внешнего дифференцирования ковариантного дифференциала оснащающего квазитензора строится псевдотензор, при обращении которого в нуль перенесение оснащающей плоскости является абсолютным. Получены условия существования параллельных перенесений плоскости Бортолотти вдоль однопараметрических семейств плоских образующих.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,\ldots=\overline{1,n};\ \ I=(a,\xi);\ \ a,\ldots=\overline{1,h};\ \xi=(i,\alpha);$$

$$i,\ldots=\overline{h+1,m};\quad \alpha,\ldots=\overline{m+1,n}.$$

Уравнения m-мерной плоскостной поверхности, рассматриваемой как r-мерное семейство B_r ($r = m — h$) плоских образующих L_h, имеет вид:

$$\omega^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}_{i}\omega^{i},\quad \omega^{i}_{a}=\Lambda^{i}_{aj}\omega^{j},\quad \omega^{\alpha}_{a}=\Lambda^{\alpha}_{ai}\omega^{i}.$$

Здесь базисные формы ω^i удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j \ \ (\theta^i_j = \omega^i_j - \Lambda^i_{aj}\omega^a + \Lambda^\alpha_j\omega^i_\alpha).$$

С поверхностью B_r ассоциируется главное расслоение $G_1(B_r)$, базой которого является сама поверхность, пространством расслоения — проективная группа GP(n), а типовым слоем — подгруппа стационарности $G_1 \subset GP(n)$ образующей плоскости. Проекция $\pi_1 : GP(n) \to B_r$ относит произвольному элементу группы GP(n) ту плоскость L_h семейства B_r, которая остается инвариантной под действием этого элемента.

Замечание. Если плоскость L_h рассматривать как множество точек, то под действием единицы e группы GP(n) остаются инвариантными все точки пространства P_n, а значит, и любая плоскость. Если же L_h рассматривать как элемент многообразия Грассмана Gr(h,n), то e оставляет неподвижной только образующую плоскость L_h, подгруппой стационарности которой является группа G_1, причем $e \in G_1$.

В ассоциированном расслоении способом Лаптева задана [1] групповая связность $\Gamma = \{\Gamma^a_i, \Gamma_{ai}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{\xi j}, \Gamma^\alpha_{\xi i}, \Gamma_{\xi i}, \Gamma^a_{\xi i}\}$.

Производится оснащение Бортолотти плоскостной поверхности, которое состоит в присоединении к каждой плоскости L_h (n—h—1)-мерной плоскости, не имеющей общих точек с плоскостью L_h, т.е. $L_h \oplus P_{n-h-1} = P_n$. Оснащение Бортолотти определяется полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\xi, \lambda_\xi\}$. Внося компоненты формы связности $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_i\omega^i$ в дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора λ , получим [1]

$$\nabla\lambda^a_\xi = \nabla_i\lambda^a_\xi\omega^i, \quad \nabla\lambda_\xi = \nabla_i\lambda_\xi\omega^i, \ (1)$$

причем $\nabla\lambda=\{\nabla\lambda^a_\xi,\nabla\lambda_\xi\}$ — ковариантный дифференциал, а $\nabla_i\lambda=\{\nabla_i\lambda^a_\xi,\nabla_i\lambda_\xi\}$ — ковариантные производные оснащающего квазитензора λ относительно связности Г.

Компоненты внешнего дифференциала от ковариантного дифференциала $\nabla\lambda$ имеют вид:

$$D\nabla\lambda^a_\xi=\nabla\lambda_\xi\wedge\tilde{\omega}^a+\nabla\lambda^b_\xi\wedge\tilde{\omega}^a_b-\nabla\lambda^a_\eta\wedge\tilde{\omega}^\eta_\xi+M^a_{\xi ij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$D\nabla\lambda_\xi=\nabla\lambda^a_\xi\wedge\tilde{\omega}_a-\nabla\lambda_\eta\wedge\tilde{\omega}^\eta_\xi+M_{\xi ij}\omega^i\wedge\omega^j, \qquad (2)$$

причем компоненты объекта $M=\{M^a_{\xi ij},\ M_{\xi ij}\}$ выражаются через компоненты объекта кривизны $R=\{R^a_{ij},R^a_{bij},R_{aij},R^\xi_{ijk},R^\xi_{\alpha ij},R_{\xi ij},R^a_{\xi ij}\}$ групповой связности Г линейным образом:

$$M^a_{\xi ij}=R^a_{\xi ij}+\lambda_\xi R^a_{ij}+\lambda^b_\xi R^a_{bij}-\lambda^a_\eta R^\eta_{\xi ij},$$

$$M_{\xi ij}=R_{\xi ij}-\lambda_\eta R^\eta_{\xi ij}+\lambda^a_\xi R_{aij}. \qquad (3)$$

Объект M, компоненты которого удовлетворяют следующим сравнениям по модулю ω^i:

$$\Delta M^a_{\alpha(i)(j)}+M_{\alpha ij}\omega^a-M^a_{kij}\omega^k_\alpha\equiv 0,\quad \Delta M^a_{i(j)(k)}+M_{ijk}\omega^a-M^a_{\alpha jk}\omega^\alpha_i\equiv 0,$$

$$\Delta M_{\alpha(i)(j)}+M^a_{\alpha ij}\omega_a-M_{kij}\omega^k_\alpha\equiv 0,\quad \Delta M_{i(j)(k)}+M^a_{ijk}\omega_a-M_{\alpha jk}\omega^\alpha_i\equiv 0, \qquad (4)$$

является псевдотензором [2]. Здесь, например,

$$\Delta M_{i(j)(k)}=dM_{ijk}-M_{ljk}\omega^l_i-M_{ilk}\theta^l_j-M_{ijl}\theta^l_k.$$

Если M=0, то из структурных уравнений (2) видно, что дифференциальные уравнения $\nabla\lambda^a_\xi=0$, $\nabla\lambda_\xi=0$ вполне интегрируемы и задают абсолютное параллельное перенесение (см., например, [3]) плоскости Бортолотти P_{n-h-1}. Объект M назовем псевдотензором параллельности [4].

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует некоторую плоскую образующую L_h плоскостной поверхности B_r. Возьмем описанное плоскостью L_h одномерное семейство плоских образующих $\rho : L_h \in \rho \subset B_r$ с дифференциальными уравнениями $\omega^i = \rho^i \omega$, где параметрическая форма ω удовлетворяет внешнему уравнению $D\omega = \omega \wedge \omega_1$, которое позволяет найти дифференциальные уравнения на коэффициенты ρ^i:

$$d\rho^i + \rho^j \theta^i_j - \rho^i \omega_1 = \rho^i_1 \omega. \qquad (5)$$

Из структурных уравнений (2) видно, что система дифференциальных уравнений вдоль однопараметрического семейства плоских образующих $\nabla\lambda^a_\xi /_\rho = 0$, $\nabla\lambda_\xi /_\rho = 0$ интегрируема. Система $\nabla\lambda^a_\xi /_\rho = 0$, $\nabla\lambda_\xi /_\rho = 0$ приводится к системе (n—h)(h+1) линейных однородных уравнений с r переменными ρ^i

$$\nabla_i \lambda^a_\xi \rho^i = 0, \quad \nabla_i \lambda_\xi \rho^i = 0.$$

Обозначим $k = \mathrm{rang}(\nabla_i \lambda^a_\xi, \nabla_i \lambda_\xi)$, тогда из системы следует, что существует (r—k)-мерное подсемейство B_{r-k} семейства B_r, так как r<(n—h)(h+1). Вдоль однопараметрических подсемейств семейства B_{r-k} плоскость P_{n-h-1} можно переносить параллельно. В зависимости от ранга k возможны следующие случаи:

$k = r$ — система (5) имеет только нулевое решение, т. е. однопараметрическое семейство плоских образующих вырождается в плоскую образующую L_h и параллельное перенесение невозможно;

2) $0 < k < r$ — система (5) имеет $(r-k)$-мерное пространство решений, т.е. есть однопараметрические семейства плоских образующих, вдоль которых параллельное перенесение осуществлять можно, и однопараметрические семейства, вдоль которых переносить нельзя;

3) $k = 0$ — уравнения системы (5) обращаются в тождества, поэтому система удовлетворяется при любых значениях ρ^i, т.е. $B_{r-k} = B_r$, и плоскость Бортолотти можно параллельно переносить вдоль любого однопараметрического семейства плоских образующих, иными словами параллельное перенесение осуществляется вдоль семейства B_r.

Замечание. Параллельное перенесение плоскости Бортолотти в пучке связностей 2-го типа [5] можно проводить вдоль плоскостной поверхности B_r.

Список литературы

1. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа, индуцированный оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2000. С. 25—28.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

4. *Полякова К.В.* Тензор параллельности и абсолютные параллельные перенесения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 80—83.

5. *Скрягина А.В.* Вырожденные параллельные перенесения в пучках связностей на плоскостной поверхности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 83—87.

A. Vyalova

PARALLEL DISPLACEMENTS BORTOLOTTI`S PLANE ALONGONE-PARAMETRICAL FAMILIES OF PLANE GENERATORS OF THE PLANE SURFACE

In n-dimensional projective space P_n the plane surface is considered as r-dimensional family B_r of the plane generators L_h. Bortolotti`s clothing of the plane surface, consisting in adding to each generator L_h projectively supplemental plane P_{n-h-1}, is made. By means of exterior differentiation of covariant differential of clothing quasitensor we build the pseudotensor, under vanishing of which the displacement of the clothing plane is absolute. The existence conditions of parallel displacements of Bortolotti`s plane along one-parametrical families of the plane generators are obtained.

УДК 514.7

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

АНАЛОГ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА С РАСТРАНОМ

Рассмотрен одуль Ли преобразований одулярного 3-мерного пространства с растраном. Установлено, что он является 2-ступенно разрешимым, а также расширением растрана 1-мерным линейным пространством.

Аффинное пространство определяется в аксиоматике Г. Вейля на линейном пространстве. Линейное пространство над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел является коммутативным действительным одулем Ли. Одули на произвольной алгебраической структуре введены Л.В. Сабининым в 1977 году [1]. Действительные одули на группах Ли называются одулями Ли. Определение 3-мерных одулей Ли можно найти в [2]. Заменяя линейное пространство одулем Ли в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем вейлевское одулярное про-