УДК 514.756

Н. В. Кондратьева

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары)

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ СЕТЕЙ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются некоторые вопросы нормализованного n-мерного проективно-метрического пространства K_n. Найдены приложения этой геометрии к изучению некоторых классов плоских сетей $\Sigma_n \subset K_n$.

***Ключевые слова*:** проективно-метрическое пространство, нормализация, связность, сеть, псевдофокус.

Результаты работы получены с использованием инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований [4; 5; 9]. Индексы принимают следующие значения:

$$i, k, l, s, t = \overline{1, n}; \bar{i}, \bar{l}, \bar{k} = \overline{0, n}.$$

1. Известно [5], что пространством с проективной метрикой, или проективно-метрическим пространством K_n, называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют):

$$g_{\bar{i}\bar{k}} x^{\bar{i}} x^{\bar{k}} = 0, \; g_{\bar{i}\bar{k}} = g_{\bar{k}\bar{i}}. \tag{1}$$

Считая $g_{00} \neq 0$ (это равносильно тому, что $A_0 \notin Q_{n-1}$), за счет нормировки коэффициентов $g_{\bar{i}\bar{k}}$ гиперквадрики и вершин репера R уравнение (1) абсолюта Q_{n-1} и условия его неподвижности можно записать [7] соответственно в виде:

$$a_{ik}x^i x^k + \frac{1}{c}\left(g_{i0}x^i + cx^0\right)^2 = 0\,, \tag{2}$$

$$da_{ik} - a_{il}\omega_k^l - a_{lk}\omega_i^l = -\frac{1}{c}\left(a_{il}g_{k0} + a_{kl}g_{i0}\right)\omega_0^l\,, \tag{3}$$

$$dg_{i0} - g_{l0}\omega_i^l - c\omega_i^0 = a_{il}\omega_0^l\,, \tag{4}$$

где

$$a_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{i0}g_{k0}}{c},\ a_{ik} = a_{ki},\ c = g_{00} = const \neq 0\,.$$

Предположим, что в проективно-метрическом пространстве K_n задано поле ковектора $\nu_{\bar{i}}, \nu_0 = -1$:

$$d\nu_i - \nu_l\omega_i^l + \omega_i^0 = \nu_{ik}\omega_0^k\,; \tag{5}$$

геометрически последнее означает, что проективно-метрическое пространство K_n нормализовано полем гиперплоскостей $\Pi_{n-1} : \breve{X}_i x^i - x^0 = 0$.

Отметим, что в силу (4), (5) система функций

$$c_i = \nu_i + \frac{1}{c}g_{i0} \tag{6}$$

образует тензор:

$$dc_i - c_k\omega_i^k = c_{ik}\omega_0^k\,, \tag{7}$$

где

$$c_{ik} = \nu_{ik} + \frac{1}{c}a_{ik}\,. \tag{8}$$

Продолжая уравнения (5), с учетом (6) имеем

$$d\nu_{ik} - \nu_{is}\omega_k^s - \nu_{sk}\omega_i^s + c_k\omega_i^0 = \nu_{ikl}\omega_0^l\,. \tag{9}$$

Система функций

$$b_{ik} = \nu_{ik} - \nu_i c_k\,, \tag{10}$$

согласно уравнениям (5), (7), (9), образует тензор:

$$db_{ik} - b_{il}\omega_k^l - b_{lk}\omega_i^l = b_{ikl}\omega_0^l\,. \tag{11}$$

Будем считать, что тензор b_{ik} невырожденный: $|b_{ik}| \neq 0$. Следовательно, в случае невырожденной нормализации пространства K_n существует поле взаимного тензора b^{ik}, компоненты которого определяются из соотношений

$$b_{il}b^{lk} = b_{li}b^{kl} = \delta_i^k . \tag{12}$$

Согласно [2], при невырожденной нормализации проективно-метрического пространства K_n полем квазитензора ν_i индуцируются два двойственных [8] пространства аффинной связности без кручения $\overset{0}{A}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$, которые определяются системами форм Пфаффа $\{\omega_0^i, \theta_k^i\}$ и $\{\omega_0^i, \overline{\theta}_k^i\}$ соответственно, где

$$\theta_k^i = \omega_k^i + \delta_k^i c_l \omega_0^l + \nu_k \omega_0^i, \;\; \overline{\theta}_k^i = \overline{\omega}_k^i + \delta_k^i \overline{c}_l \omega_0^l + \nu_k \omega_0^i; \tag{13}$$

$$\begin{cases} D\omega_0^i = \omega_0^l \wedge \theta_l^i, D\theta_k^i = \theta_k^l \wedge \theta_l^i + \dfrac{1}{2} R_{kst}^i \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \\ D\omega_0^i = \omega_0^l \wedge \overline{\theta}_l^i, D\overline{\theta}_k^i = \overline{\theta}_k^l \wedge \overline{\theta}_l^i + \dfrac{1}{2} \overline{R}_{kst}^i \omega_0^s \wedge \omega_0^t. \end{cases} \tag{14}$$

Тензоры кривизны пространств $\overset{0}{A}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ соответственно имеют строения:

$$R_{kst}^i = 2b_{k[s}\delta_{t]}^i - 2b_{[st]}\delta_k^i, \;\; \overline{R}_{kst}^i = 2\overline{b}_{k[s}\delta_{t]}^i - 2\overline{b}_{[st]}\delta_k^i, \tag{15}$$

где

$$\overline{b}_{ik} = b_{ki}, \overline{c}_l = c_l + \frac{\Lambda_l}{n+1}, \tag{16}$$

$$\Lambda_l = B_l - 2(n+1)c_l, B_l = b^{ki}b_{ikl} + \frac{2}{c} g_{l0}, \tag{17}$$

$$\overline{\omega}_k^i = \omega_k^i + b^{is} A_{skl}\omega_0^l, \overline{\theta}_k^i = \theta_k^i + \left(b^{is} A_{skl} + \delta_k^i \frac{\Lambda_l}{n+1} \right)\omega_0^l, \tag{18}$$

$$A_{ikl} = b_{ikl} - \nu_i b_{lk} - \nu_k b_{il} - \frac{1}{n+1} b_{ik} B_l . \tag{19}$$

Уравнения (11) тензора b_{ik} в силу соотношений (15), (16) — (19) можно записать в виде:

$$db_{ik} - b_{lk}\theta_i^l - b_{il}\overline{\theta}_k^l = 0, \tag{20}$$

что выражает собой обобщенную сопряженность связностей пространств $\overset{0}{A}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ относительно поля тензора b_{ik}. Замыкая уравнения (20), с использованием (12), (14) имеем

$$R_{[st]} + \overline{R}_{[st]} = 0, \tag{21}$$

где $R_{st} = R_{stk}^k$, $\overline{R}_{st} = \overline{R}_{stk}^k$ — тензоры Риччи связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ пространств $\overset{0}{A}_{n,n}$ и $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Внутренние геометрии пространств аффинной связности* $\overset{0}{A}_{n,n}$ *и* $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$, *индуцируемых невырожденной нормализацией проективно-метрического пространства* K_n, *могут быть эквиаффинными лишь одновременно.*

Предположим, что нормализация проективно-метрического пространства — полярная ($c_i = 0$), тогда с использованием (6) — (8), (10) имеем

$$b_{ik} = -\frac{1}{c} a_{ik}. \tag{22}$$

Соотношения (22) говорят о том, что полярная нормализация пространства K_n является гармонической ($b_{[ik]} = 0$).

Можно доказать, что имеет место

Теорема 2. *Связности* ∇ *и* $\overline{\nabla}$ *двойственных пространств* $\overset{0}{A}_{n,n}$ *и* $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ *совпадают тогда и только, когда невырожденная нормализация пространства* K_n *— полярная.*

Уравнения (3) с использованием (13_1) и $c_k = 0$ (см. (6)) запишутся в виде:

$$da_{ik} - a_{lk}\theta_i^l - a_{il}\theta_k^l = 0. \tag{23}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Связность пространства* $\overset{0}{A}_{n,n}$, *индуцируемого невырожденной полярной нормализацией проективно-метрического пространства* K_n, *является вейлевой, с полем невырожденного тензора* a_{ik} (b_{ik}).

2. Следуя работе [1], будем говорить, что в некоторой области пространства K_n задана *плоская сеть* Σ_n, если в этой области задано *n* семейств линий так, что через каждую точку $A_0 \in K_n$ проходит точно по одной линии каждого семейства с линейно независимыми касательными направлениями к ним в точке A_0. В проективном репере $R = \{A_0, A_k\}$, отнесенном к сети $\Sigma_n \subset K_n$, ее дифференциальные уравнения имеют вид [1]:

$$\omega_i^k = a_{il}^k \omega_0^l, i \neq k. \tag{24}$$

Условием параллельного перенесения направления A_0M, где $M = \lambda^s A_s$, вдоль некоторой кривой *l* в связности пространства $\overset{0}{A}_{n,n}$ является выполнение уравнений [5]

$$d\lambda^k + \lambda^l \theta_l^k = \Omega\lambda^k (\operatorname{mod} l), D\Omega = \Omega \wedge \Omega_0^0. \tag{25}$$

Из (13_1), (24), (25) следует, что условие параллельного перенесения направления касательной A_0A_k (все $\lambda^i = 0, i \neq k$) к *k*-й линии сети $\Sigma_n \subset K_n$ вдоль ее *l*-й линии (все $\omega_0^t = 0$, кроме ω_0^l) в связности пространства $\overset{0}{A}_{n,n}$ выражается равенствами

$$a_{kl}^i + \nu_k \delta_l^i = 0, i \neq k. \tag{26}$$

Аналогично с использованием (13_2) можно показать, что условие параллельного перенесения направления касательной A_0A_k к *k*-й линии сети $\Sigma_n \subset K_n$ вдоль ее *l*-й линии в связности пространства $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ имеет вид:

$$a_{kl}^i + \nu_k \delta_l^i + b^{it} A_{tkl} = 0, i \neq k. \tag{27}$$

Сеть $\Sigma_n \subset K_n$ назовем *чебышевской* (*геодезической*) *первого* или *второго рода*, если все направления касательных A_0A_k переносятся параллельно вдоль любой другой линии сети (вдоль соответствующей ей линии ω_0^k) в аффинной связности пространства $\overset{0}{A}_{n,n}$ или $\overset{0}{\bar{A}}_{n,n}$.

Для чебышевской сети первого рода $\Sigma_n \subset K_n$ из (26) находим:

1) при $n \geq 2$:

$$a_{ki}^i + \nu_k = 0, i \neq k; \qquad (28)$$

2) при $n > 2$ кроме (28) справедливо

$$a_{kl}^i = 0, \textit{все индексы различны.} \qquad (29)$$

Соотношения (28) говорят о том, что чебышевская сеть $\Sigma_n \subset K_n$ при $n \geq 2$ является сетью с совпавшими псевдофокусами F_k^i [1]; соотношения (29) доказывают, что при $n > 2$ чебышевская сеть первого рода $\Sigma_n \subset K_n$ является n-сопряженной системой [8].

Из соотношений (26), (27) следует, что геодезическая сеть первого рода, чебышевская и геодезическая сеть второго рода $\Sigma_n \subset K_n$ характеризуются соответственно равенствами

$$a_{kk}^i = 0, i \neq k, \qquad (30)$$

$$a_{kl}^i + \nu_k \delta_l^i + b^{is} A_{skl} = 0, k \neq i, l, \qquad (31)$$

$$a_{kk}^i + b^{is} A_{skk} = 0, k \neq i. \qquad (32)$$

Предположим, что сеть Σ_n в K_n сопряжена относительно поля конусов направлений $a_{is}\omega_0^i\omega_0^s = 0$; в выбранном репере это равносильно тому, что

$$a_{ik} = 0, i \neq k. \qquad (33)$$

В случае полярной нормализации пространства K_n из соотношений (22) с использованием (33) находим

$$b_{ik} = 0, i \neq k. \qquad (34)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *В случае сети* $\Sigma_n \subset K_n$, *сопряженной относительно поля конусов направлений* $a_{is}\omega_0^i\omega_0^s = 0$, *полярная нормализация пространства* K_n *является нормализацией, гармоничной сети [3].*

3. Рассмотрим частные классы плоских сетей $\Sigma_n \subset K_n$.

а) Пусть сеть $\Sigma_n \subset K_n$ сопряжена относительно поля невырожденных конусов направлений $a_{is}\omega_0^i\omega_0^s = 0$. Из дифференциальных уравнений (3) для этих равенств (33) с учетом (24) имеем

$$a_{ii}a_{kl}^i + a_{kk}a_{il}^k = \frac{1}{c}\left(a_{il}g_{k0} + a_{kl}g_{i0}\right), i \neq k\,. \tag{35}$$

Из равенств (35) при $n > 2$ находим

$$a_{ii}a_{kl}^i + a_{kk}a_{il}^k = 0, \textit{все индексы различны}\,. \tag{36}$$

В случае голономной сети $\Sigma_n \subset K_n$, $n > 2$, то есть при $a_{[kl]}^i = 0, k, l \neq i$ из последних равенств, циклируя по индексам *i*, *k*, *l*, получим систему из трех линейных однородных уравнений с тремя «неизвестными» $a_{kl}^i, a_{il}^k, a_{ik}^l$. Определитель этой системы в силу невырожденности конуса направлений $a_{is}\omega_0^i\omega_0^s = 0$ отличен от нуля: $\Delta = -2a_{ii}a_{kk}a_{ll} \neq 0$, следовательно, она имеет только нулевое решение:

$$a_{kl}^i = 0, \textit{все индексы различны}\,. \tag{37}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Сопряженная относительно поля невырожденных конусов направлений* $a_{is}\omega_0^i\omega_0^s = 0$ *сеть* $\Sigma_n \subset K_n$ *при* $n > 2$ *голономна тогда и только тогда, когда она является n-сопряженной системой в смысле Р. В. Смирнова [6].*

б) Из равенств (35) при $l = i$ с использованием (33) получим

$$a_{ii}a_{ki}^i + a_{kk}a_{ii}^k = \frac{1}{c}\left(a_{ii}g_{k0} + a_{ki}g_{i0}\right), i \neq k\,. \tag{38}$$

Если при этом сопряженная относительно поля тензора a_{is} сеть $\Sigma_n \subset K_n$, $n \geq 2$ при нормализации K_n полем квазитензора ν_i является чебышевской первого рода, то с использованием (6), (26) равенства (38) запишутся в виде

$$a_{kk}a_{ii}^k = a_{ii}c_k, i \neq k \; . \tag{39}$$

Равенства (39) доказывают следующее предложение:

Теорема 7. *Если сопряженная относительно поля невырожденного тензора a_{is} сеть $\Sigma_n \subset K_n$, $n \geq 2$, при некоторой нормализации пространства K_n есть чебышевская первого рода, то она не может быть геодезической первого рода, и это равносильно тому, что нормализация пространства K_n не может быть полярной.*

в) Справедлива

Теорема 8. *Если относительно невырожденной нормализации ($|b_{ik}| \neq 0$) пространства K_n, гармоничной сети $\Sigma_n \subset K_n$, $n \geq 2$ ($b_{ik} = 0, i \neq k$), сеть Σ_n является геодезической второго рода, то Σ_n есть сеть с совпавшими псевдофокусами и пространство K_n нормализовано полем ее гармонических гиперплоскостей $[F_i]$.*

В условиях теоремы 8 равенства (31) записываются в виде

$$a_{kk}^i + b^{ii}A_{ikk} = 0, i \neq k \; . \tag{40}$$

Из дифференциальных уравнений (11) с использованием $b_{ik} = 0, i \neq k$, (24) имеем

$$b_{ii}a_{kl}^i - b_{kk}a_{il}^k = b_{ikl}, i \neq k \; . \tag{41}$$

Тензор (19) в силу (41) имеет вид:

$$A_{ikk} = -b_{ii}a_{kk}^i - b_{kk}\left(a_{ik}^k + \nu_i\right). \tag{42}$$

Из соотношений (40), (42) находим

$$\nu_i = -a_{ik}^k, i \neq k \; , \tag{43}$$

что и доказывает теорему 8.

Согласно $b_{ik} = 0, i \neq k$, (19), (31) и (41), справедлива

Теорема 9. *Если относительно невырожденной нормализации* ($|b_{ik}| \neq 0$) *пространства* K_n, *гармоничной сети* $\Sigma_n \subset K_n$, $n \geq 2$ ($b_{ik} = 0, i \neq k$), *сеть* Σ_n *является чебышевской второго рода, то* Σ_n *есть геодезическая сеть первого рода и при* $n > 2$ *она является геодезической первого рода и n-сопряженной системой одновременно.*

Список литературы

1. *Базылев В. Т.* К геометрии плоских многомерных сетей // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. 1965. №243. С. 29—37.

2. *Голубева Е. А.* Двойственные аффинные связности, индуцируемые нормализацией пространства проективно-метрической связности // ВИНИТИ РАН. М., 2005. №1743 Деп.

3. *Гольдберг В. В.* Об одной нормализации *p*-сопряженных систем *n*-мерного проективного пространства // Тр. геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. 1966. Т. 1. С. 89—109.

4. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. *Смирнов Р. В.* Преобразования Лапласа *p*-сопряженных систем // ДАН СССР. 1950. Т. 71, №3. С. 437—439.

7. *Столяров А. В.* Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Калининградский ун-т, 2001. Вып. 32. С. 94—101.

8. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

9. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М., 1948.

N. Kondrateva

SOME CLASSES OF NETWORKS IN PROJECTIVE-METRIC SPACE

This work deals with some issues of the normalized *n*-dimensional projective-metric space K_n. Applications of this geometry to studying some classes of flat networks $\Sigma_n \subset K_n$ have been found.