УДК 512.54 + 514.77

ПЛОСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

С.Е.Степанов

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Введение. В работе [1] пространство замкнутых p-форм $(1 \leq p \leq n-1)$ на римановом многообразии M_n было расщеплено инвариантным образом на два класса гармонических и "плоских" p-форм.

В настоящей статье доказывается, что плоские формы образуют подалгебру $\mathbb{R}$-алгебры внешних форм; доказывается теорема существования и приводятся примеры плоских p-форм на римановом многообразии постоянной кривизны. Найдены условия, препятствующие существованию плоских p-форм на компактном римановом многообразии. В заключении статьи рассматривается одно приложение построенной теории плоских p-форм.

2. Локальная теория. Пусть M_n – риманово многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через g_{ij} и $\omega_{i_1 \dots i_p}$ компоненты метрического тензора g и p-формы ω относительно локальной системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ на M_n. Полагаем ∇_k символом ковариантного дифференцирования по отношению к векторному полю $\partial/\partial x^k$. Тогда уравнения, определяющие плоскую p-форму [1], предстанут в следующем виде:

$$\nabla_k \omega_{i_1 \dots i_p} = -\frac{p}{n-p+1}\, g_{k[i_1} \delta\omega_{i_2 \dots i_p]}, \tag{2.1}$$

где $\delta\omega_{i_2 \dots i_p} = -g^{ij}\nabla_i \omega_{j i_2 \dots i_p}$ для $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Очевидно, что $\nabla_{[k}\omega_{i_1 \dots i_p]} = 0$, а потому $d\omega = 0$.

Условием интегрируемости уравнений (2.1) служат тождества Риччи [2, с.43]:

$$\nabla_k \nabla_j \omega_{i_1 \dots i_p} - \nabla_j \nabla_k \omega_{i_1 \dots i_p} = -\sum_{s=1}^{p} \omega_{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_p} \cdot R^{l}_{i_s kj},$$

где $R^{l}_{i_s kj}$ суть компоненты тензора кривизны связности ∇. На многообразии M_n постоянной кривизны C эти тождества принимают следующий вид:

$$g_{j[i_1}\nabla_{|k|}\delta\omega_{i_2 \dots i_p]} + g_{k[i_1}\nabla_{|j|}\delta\omega_{i_2 \dots i_p]} =$$

$$= \frac{2(n-p+1)}{p}\, C \cdot \{ -g_{i_1[k}\omega_{j]i_2 \dots i_p} + g_{i_2[k}\omega_{|i_1|j]i_3 \dots i_p} + \dots + g_{i_p[k}\omega_{|i_1 \dots i_{p-1}|j]} \}. \tag{2.2}$$

Умножим левые и правые части равенств (2.2) на $g^{i_1 j}$, а затем проведем суммирование по i_1 и j, тогда получим

$$\nabla_k \delta\omega_{i_2 \dots i_p} = (n-p+1)C \cdot \omega_{k i_2 \dots i_p}.$$

Подстановка выражений $\nabla\delta\omega$ в условия интегрируемости (2.2) обращает последние в тождества. Нами доказана следующая

Теорема 1. На римановом многообразии M_n постоянной кривизны всегда существуют плоские p-формы.

Используя канонический изоморфизм $g: TM \to T^*M$, временно p-формы $\omega_{i_1 \dots i_p}$ отождествим с p-векторами $\omega^{i_1 \dots i_p}$, сохраняя для последних обозначения p-форм. Тогда уравнения (2.1) представимы в следующем виде:

$$\nabla\omega = -p(n-p+1)^{-1}\, id \wedge \delta\omega,$$

где

$$\delta\omega^{i_2 \dots i_p} = -\nabla_k \omega^{k i_2 \dots i_p}.$$

Пусть имеется плоская q-форма: ω':

$$\nabla\omega' = -q(n-p+1)\, id \wedge \delta\omega'.$$

Докажем, что $(p+q)$-форма $\theta = \omega \wedge \omega'$ – плоская, т.е.

$$\nabla\theta = -\frac{p+q}{n-(p+q)+1}\, id \wedge \delta\theta. \tag{2.3}$$

Согласно сделанным предположениям, имеем

$$\nabla\theta = -\frac{p}{n-p+1}\, id \wedge \delta\omega \wedge \omega' - \frac{q}{n-q+1}\, \omega \wedge id \wedge \delta\omega', \tag{2.4}$$

откуда находим

$$\delta\theta = \frac{n-(p+q)+1}{p+q} \cdot \left\{ \frac{p}{n-p+1}\, \delta\omega \wedge \omega' + \frac{q}{n-q+1}\, \omega \wedge \delta\omega' \right\}. \tag{2.5}$$

Подстановкой выражений $\delta\theta$ из (2.5) в уравнения (2.3) мы сможем их привести к виду (2.4). Это и доказывает наше утверждение.

Теорема 2. Внешнее произведение двух плоских p и q-форм является плоской $(p+q)$-формой.

Следствие. Множество плоских форм на римановом многообразии M_n относительно внешнего произведения образует алгебру над полем действительных чисел, подалгебру алгебры внешних форм [3, с.4I].

Пусть ξ и ξ' суть линейно независимые конциркулярные векторные поля [4], т.е.

$$\nabla\xi = -n^{-1}\delta\xi\, id, \quad \nabla\xi' = -n^{-1}\delta\xi'\, id.$$

Нетрудно усмотреть, что конциркулярные I-формы ω и ω', т.е. I-формы, сопряженные относительно g полям ξ и ξ', будут плоскими I-формами. Тогда на основании теоремы 2 заключаем, что $\omega\wedge\omega'$ – плоская 2-форма. Наибольшее число конциркулярных векторных полей $n+1$ допускает только многообразие постоянной кривизны. Следовательно, на таком многообразии всегда можно построить пример плоской p-формы $(1\le p\le n-1)$ как внешнего произведения p конциркулярных I-форм.

3. Глобальная теория. Для любых p-форм ω и ω' полагаем

$$\langle\omega,\omega'\rangle = \frac{1}{p!}\,\omega^{i_1\dots i_p}\,\omega'_{i_1\dots i_p}.$$

Тогда для $\|\omega\|^2 = \langle\omega,\omega\rangle$ простым вычислением получаем

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left(\|\omega\|^2\right) = -\langle\delta\nabla\omega,\omega\rangle + \|\nabla\omega\|^2, \tag{3.I}$$

где [6, с.52-53]

$$-\langle\delta\nabla\omega,\omega\rangle + \langle\delta d\omega,\omega\rangle + \langle d\delta\omega,\omega\rangle = p\,F(\omega,\omega). \tag{3.2}$$

Здесь $F(\omega,\omega)$ – квадратичная форма, определяемая равенством

$$F(\omega,\omega) = R_{ij}\,\omega^{i i_2\dots i_p}\,\omega^{j}{}_{i_2\dots i_p} - \frac{p-1}{2}R_{ijkl}\,\omega^{ij i_3\dots i_p}\,\omega^{kl}{}_{i_3\dots i_p} \tag{3.3}$$

для компонент R_{ij} тензора Риччи R_{ic} и компонент $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$ тензора римановой кривизны R. В случае плоской p-формы ω из уравнений (2.I) последует, что

$$\langle d\delta\omega,\omega\rangle = (n-p+1)\langle\delta\nabla\omega,\omega\rangle, \quad d\omega = 0.$$

Вследствие этих равенств, а также равенства (3.2) будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left(\|\omega\|^2\right) = -\frac{p}{n-p}F(\omega,\omega) + \|\nabla\omega\|^2. \tag{3.4}$$

Если применить к (3.4) теорему Хопфа-Бохнера [6], то справедлива

Т е о р е м а 3. На n-мерном компактном римановом многообразии M_n для плоской p-формы ω, удовлетворяющей неравенству $F(\omega,\omega)\le 0$, выполняется равенство $\nabla\omega = 0$ и ав-

томатически $F(\omega,\omega)=0$. В частности, если квадратичная форма $F(\omega,\omega)<0$ для всех $\omega\in\Lambda^p(T^*M_n)$, то на M_n не существует плоских p-форм, отличных от нулевых.

В каждой точке $x\in M_n$ тензор римановой кривизны R определяет [7, с.333] симметрический эндоморфизм

$$\hat{R}:\ \Lambda^2(T^*_x M_n) \longrightarrow \Lambda^2(T^*_x M_n).$$

Величина

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\langle\hat{R}(\omega),\omega\rangle}{\|\omega\|^2}$$

называется [9, с.I20] бивекторной кривизной в направлении $\omega\in\Lambda^2(T^*_x M_n)$. Для разложимой 2-формы $\omega = X\wedge Y$ имеем $\hat{K}(\omega) = K(X,Y)$, где K – секционная кривизна многообразия M_n. Если положить $-A\le\hat{K}\le -B<0$ для таких постоянных A и B, что $(n-1)B=(p-1)A$, то [6, с.66-68] квадратичная форма $F(\omega,\omega)\le 0$; если же $(n-1)B>(p-1)A$, то квадратичная форма $F(\omega,\omega)<0$ для всех $\omega\in\Lambda^p(T^*M_n)$. На основании теоремы 3 теперь может быть сформулирована

Т е о р е м а 4. Пусть бивекторная кривизна $\hat{K}$ компактного риманова многообразия M_n удовлетворяет условию $-A\le\hat{K}\le -B<0$ для постоянных A и B. Если $(n-1)B=(p-1)A$, то для любой плоской p-формы ω выполняется равенство $\nabla\omega=0$; если же $(n-1)B>(p-1)A$, то на M_n не существует плоских p-форм, отличных от нулевых.

Собственное значение τ эндоморфизма

$$\hat{R}:\ \Lambda^2(T^*_x M_n) \longrightarrow \Lambda^2(T^*_x M_n)$$

определяется равенством $\hat{R}(\omega)=\tau\omega$ и является вещественным числом. Согласно [8]

$$(\Lambda+\lambda) - \frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)} \le \tau \le (\Lambda+\lambda) + \frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}, \tag{3.5}$$

если $2k$ – ранг 2-формы ω и секционная кривизна K многообразия M_n заключена в пределах $\lambda\le K\le\Lambda$. Очевидно при этом, что $2\hat{K}(\omega)=\tau$. Пользуясь неравенствами (3.5), найдем ограничения на λ и Λ, при которых $F(\omega,\omega)<0$ для всех $\omega\in\Lambda^p(T^*M_n)$. Согласно теореме 4 мы должны положить

$$(p-1)\left\{(\Lambda+\lambda) - \frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}\right\} > (n-1)\left\{(\Lambda+\lambda) + \frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}\right\}, \tag{3.6}$$

$$(\Lambda+\lambda)-\frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}\leq(\Lambda+\lambda)+\frac{4k-1}{3(\Lambda-\lambda)}<0. \qquad (3.7)$$

Неравенства (3.6) и (3.7) имеют место, когда

$$\lambda<\Lambda<-\lambda,\ \lambda<0,\ \lambda^2-\Lambda^2>\tfrac{1}{3}(n-p)^{-1}(2n-1)(n+p-2), \qquad (3.8)$$

поэтому справедлива

Теорема 5. Если секционная кривизна K компактного риманова n-мерного многообразия M_n заключена в пределах $\lambda\leq K\leq\Lambda$ для постоянных λ и Λ, удовлетворяющих неравенствам (3.8), то на многообразии M_n не существует плоских p-форм, отличных от нулевых.

4. Приложение. Симплектической структурой на $2m$-мерном многообразии M_{2m} называется невырожденная замкнутая 2-форма. На римановом многообразии M_{2m}, кроме хорошо известных гармонических 2-форм, замкнутыми будут изученные выше плоские 2-формы. В частности, на двумерном римановом многообразии симплектической структурой будет 2-форма $\omega\wedge\omega'$, где ω и ω' суть независимые конциркулярные I-формы.

Пусть ω – плоская 2-форма, тогда 2-форма $\omega'=\hat{R}(\omega)$ будет замкнутой, а в случае невырожденности эндоморфизма $\hat{R}$, что очевидно, симплектической. Докажем это. Согласно предположению имеем

$$\nabla_{[s}\omega'_{ij]}=\nabla_{[s}R_{ij]kl}\,\omega^{kl}+R_{kl[ij}\nabla_{s]}\omega^{kl},$$

где $\nabla_{[s}R_{ij]kl}=0$ согласно второму тождеству Бианки и

$$R_{kl[ij}\nabla_{s]}\omega^{kl}=-2(n-1)^{-1}\delta\omega^{l}R_{l[sij]}=0$$

согласно уравнениям (2.I) и первому тождеству Бианки, поэтому $d\omega'=0$.

На основании теорем 3 – 5 нетрудно получить условия, препятствующие заданию на компактном многообразии плоских симплектических структур. При этом надо учитывать, что в этом случае $p=2$.

Замечание. Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 94 - 0I - 0I595.

Библиографический список

1. Stepanov S.E. The seven classes of almost symplectic structures // Webs and quasigroups / Tver Gos. Univ. Tver, 1992. p. 93-96.

2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948. 3I6 с.

3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.1. 344 с.

4. Yano K. Concircular geometry // Proc. Imp. Acad. 1940. V. 16. p. 195-200.

5. Fulton C. Parallel vector fields // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. N1. p. 136-137.

6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. I52 с.

7. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 4I4 с.

8. Bourguignon J.-P., Karcher H. Curvature operators: pinching estimates and geometric examples // Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e série. 1978. V. 11. p. 71-92.

9. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: ФМ, I96I. 463 с.

УДК 5I4.75

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ m-МЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НЕМУ СВЯЗНОСТИ

Л.Ф.Филоненко

(Киевский институт ВВС)

§ I. Введение

Дифференциальная геометрия распределений многомерных линейных элементов в многообразиях была предметом многих исследований. Г.Ф.Лаптев и Н.М.Остиану [1], [2], предполагая наличие проективной связности в многообразии, свели изучение геометрии распределения к задаче построения геометрических объектов, охваченных фундаментальными объектами распределения, рассматривая его как подмногообразие в пространстве m-мерных линейных элементов в многообразии. Они выделили последовательность подобъектов, к которой сводится вся последовательность фундаментальных объектов при рассмотрении голономного распределения и фиксации одного его интегрального подмногообразия. В своих построениях они преимущественно ограни-

12 Зак. 1606