УДК 514.764.5

А.В. Столяров

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

ПРОСТРАНСТВО ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ $P_{n,n+1}$, СНАБЖЕННОЕ ИНВАРИАНТНЫМ ПОЛЕМ ЛОКАЛЬНЫХ ГИПЕРКВАДРИК ДАРБУ

Найдено инвариантное условие, при котором пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ с инвариантным полем локальных гиперквадрик Дарбу является изоморфным пространству конформной связности $C_{n,n}$.

В ходе всего изложения индексы принимают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; i, j, k = \overline{1, n}; I, K = \overline{1, n+1}$.

Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ с n-мерной базой B_n и $(n+1)$-мерными центропроективными слоями P_{n+1}, определяемое системой $(n+2)^2$ форм Пфаффа ω_λ^μ, подчиненных структурным уравнениям

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu + \frac{1}{2} R_{\lambda st}^\mu \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \omega_\rho^\rho = 0. \tag{1}$$

Независимые первые интегралы $u^1,...,u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^i = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы B_n; с текущей точкой базы связывается $(n + 1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, отнесенное к точечному реперу $\{A_\lambda(u)\}$, причем $A_0(u) \equiv A(u)$. Формы ω_λ^μ определяют главную часть отображения ψ соседнего локального пространства $P_{n+1}(u+du)$ на исходное $P_{n+1}(u)$ [3; 4]:

$$A_\lambda(u + du) \xrightarrow{\psi} A_\lambda(u, du) = A_\lambda(u) + \omega_\lambda^\rho A_\rho(u) + \chi \cdot \varepsilon_\lambda^\rho A_\rho, \tag{2}$$

где $\chi = \sqrt{(\omega_0^1)^2 + \ldots + (\omega_0^n)^2}$, $\lim\limits_{\chi \to 0} \varepsilon_\lambda^\rho = 0$. Структурные уравнения (1) обеспечивают инвариантность главной части отображения (2) относительно преобразований семейства реперов.

В структурных уравнениях (1) функции $R^\mu_{\lambda st}$ кососимметричны по s, t, и их совокупность представляет собой тензор кривизны-кручения пространства $\mathrm{P}_{n,n+1}$:

$$\nabla_\delta R^\mu_{\lambda st} + 2R^\mu_{\lambda st}\pi_0^0 = 0,$$

где δ – символ дифференцирования по параметрам центропроективной группы фиксированного слоя, т.е. при $\omega_0^i = 0$ и $\pi_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\mu\big|_{\omega_0^k=0}$. Отметим, что система дифференциальных уравнений движения репера $\{\mathrm{A}_\lambda\}$ в слое имеет вид $\delta\mathrm{A}_\lambda =$ $= \pi_\lambda^\rho \mathrm{A}_\rho$, откуда, в частности, следует

$$\pi_0^{n+1} = 0. \tag{3}$$

Система функций R^K_{0st} образует подтензор тензора $R^\mu_{\lambda st}$, а именно тензор кручения пространства $\mathrm{P}_{n,n+1}$.

Допустим, что в пространстве $\mathrm{P}_{n,n+1}$ задано поле инвариантных гиперквадрик овального типа Q_n^2, проходящих через центры соответствующих слоев (поле локальных гиперквадрик Дарбу):

$$g_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu = 0,\ g_{00} = 0,\ g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda},\ \left|g_{\lambda\mu}\right| \neq 0, \tag{4}$$

$$\delta g_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho}\pi_\mu^\rho - g_{\rho\mu}\pi_\lambda^\rho = \theta g_{\lambda\mu},\ D\theta = \theta \wedge \theta_0^0.$$

За счет перенормировки коэффициентов уравнения (4) можно добиться, чтобы $\theta = 0$; следовательно, справедливо выражение

$$\delta g_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho}\pi_\mu^\rho - g_{\rho\mu}\pi_\lambda^\rho = 0. \tag{5}$$

Согласно лемме Н.М. Остиану [5] уравнения (5) позволяют провести такую канонизацию репера $R = \{\mathrm{A}_\lambda\}$, при которой

$$g_{n+1,n+1} = g_{0i} = g_{n+1,i} = 0,\ g_{0,n+1} = 1; \tag{6}$$

при этом справедливы выражения

$$\pi_i^{n+1} = \pi_{n+1}^0 = \pi_0^0 + \pi_{n+1}^{n+1} = \pi_i^0 + g_{ik}\pi_{n+1}^k = 0,$$

$$\delta g_{ij} - g_{ik}\pi_j^k - g_{kj}\pi_i^k = 0. \qquad (7)$$

Геометрически такая специализация репера R означает следующее: инвариантная локальная гиперквадрика Дарбу Q_n^2 оказалась отнесенной к реперу 1-го порядка, при которой вершины A_0, A_{n+1} принадлежат гиперквадрике Q_n^2, а вершины A_i лежат на пересечении касательных гиперплоскостей к Q_n^2 в точках A_0, A_{n+1}.

Соотношения (3 и 7) говорят о том, что в каждом слое пространства $P_{n,n+1}$ действует подгруппа группы проективных преобразований, являющаяся стационарной по отношению к гиперквадрике Дарбу Q_n^2; эта подгруппа зависит от $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ параметров.

При таком выборе поля реперов R (согласно работе [2] это поле назовем полем полуизотропных реперов) уравнение гиперквадрики Дарбу поля (4) в силу равенств (6) имеет вид

$$g_{ij}x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0, \left|g_{ij}\right| \neq 0. \qquad (8)$$

Из равенств (3) и (7) следуют соотношения

$$\omega_0^{n+1} = a_{0k}^{n+1}\omega_0^k,\ \omega_{n+1}^0 = a_{n+1,k}^0\omega_0^k,\ \omega_i^{n+1} = \Lambda_{ik}^{n+1}\omega_0^k,$$

$$\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = \mathrm{B}_k\omega_0^k,\ g_{ik}\omega_{n+1}^k + \omega_i^0 = \Lambda_{ik}\omega_0^k, \qquad (9)$$

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = g_{ijk}\omega_0^k.$$

Продолжая уравнения системы (9), с использованием уравнений (1) находим дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять функции $a_{0k}^{n+1}, a_{n+1,k}^0, \Lambda_{ik}^{n+1}, \mathrm{B}_k, \Lambda_{ik}, g_{ijk}$. Этим уравнениям удовлетворяют, например, охваты

$$a_{0k}^{n+1} = a_{n+1,k}^0 = \mathrm{B}_k = \Lambda_{ik} = g_{ijk} = 0,\ \Lambda_{ik}^{n+1} = -g_{ik}; \qquad (10)$$

при этом компоненты тензора кривизны-кручения пространства $P_{n,n+1}$ подчинены конечным соотношениям

$$R_{0st}^{n+1} = R_{n+1,st}^{0} = 0,\; R_{0st}^{0} + R_{n+1,st}^{n+1} = 0,$$
$$R_{ist}^{n+1} + g_{il}R_{0st}^{l} = 0,\; g_{il}R_{n+1,st}^{l} + R_{ist}^{0} = 0,\; g_{il}R_{jst}^{l} + g_{jl}R_{ist}^{l} = 0. \quad (11)$$

При охватах (10) уравнения (9) запишутся в виде

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0,\; \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0,$$
$$\omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0,\; \omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0, \quad (12)$$
$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0.$$

Согласно работам [1; 6] дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ от $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ параметров группы конформных преобразований, осуществляющие инфинитезимальное перемещение полуизотропного репера n-мерного конформного пространства C_n с полем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяют зависимостям вида (12); при этом при перенесении Дарбу все точки конформного пространства C_n отображаются в точки неподвижной гиперквадрики Дарбу (8) проективного пространства P_{n+1}, а гиперсферы действительных радиусов пространства C_n отображаются в точки пространства P_{n+1}, лежащие вне овальной гиперквадрики (8).

Это говорит о том, что каждый центропроективный слой P_{n+1} пространства проективной связности $P_{n,n+1}$ с полем локальных гиперквадрик Дарбу (8) изоморфен конформному пространству C_n.

Известно [4], что поле геометрического объекта X^A расслоенного многообразия M с фундаментально-групповой связностью называется инвариантным относительно связности пространства M, если при определяющем связность инфинитезимальном отображении локальный объект соседнего слоя $E_N(u+du)$ отображается (в главном) в локальный объект исходного слоя $E_N(u)$. Согласно работе [4] поле геометрического объекта X^A инвариантно относительно связности только тогда, когда определяющая его система дифференциальных уравнений имеет вид

$$dX^A = \xi_u^A(X)\omega^u, \quad (13)$$

где $\xi_u^{\mathrm{A}}(\mathrm{X})-$ система основных функций, определяющих объект X^{A}; ω^u – формы связности пространства.

Уравнения (12; 13) доказывают следующее предложение

Теорема. *Для того чтобы пространство проективной связности* $\mathrm{P}_{n,n+1}$ *обладало инвариантным полем гиперквадрик (8) овального типа, т.е. чтобы оно было изоморфно пространству конформной связности* $\mathrm{C}_{n,n}$ *с полем локальных гиперквадрик Дарбу (8), необходимо и достаточно, чтобы в полуизотропном репере выполнялась система дифференциальных уравнений (12).*

Заметим, что наличие в $\mathrm{P}_{n,n+1}$ инвариантного поля локальных гиперквадрик Дарбу овального типа (8) приводит к конечным соотношениям (11) для компонент тензора кривизны-кручения пространства $\mathrm{P}_{n,n+1}$. Одновременное выполнение этих соотношений есть условие полной интегрируемости объединенной системы дифференциальных уравнений (12); при этом широта ее решения есть $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ произвольных постоянных.

Отметим, что:

1) система функций $\{R^{\mu}_{\lambda st}\}$, удовлетворяющих конечным соотношениям (11), есть тензор кривизны-кручения пространства конформной связности $\mathrm{C}_{n,n}$, причем система функций $\{R^{i}_{0st}\}$ образует тензор кручения пространства $\mathrm{C}_{n,n}$;

2) полем метрического тензора пространства конформной связности $\mathrm{C}_{n,n}$ является поле тензора g_{ij}; отрицательный индекс инерции l квадратичной формы $g_{ij}\omega_0^i\omega_0^j$ есть индекс пространства конформной связности $\mathrm{C}_{n,n}$ (при $l>0$ — пространство псевдоконформной связности индекса l, при $l = 0$ — пространство собственно конформной связности).

Список литературы

1. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. 1961. Т. 53. №1. С. 53—72.

2. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань, 1972.

3. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7. №2. С. 231—240.

6. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Stolyarov

THE PROJCTIVELY CONNECTED SPACE $P_{n,n+1}$ WITH THE INVARIANT FIELD OF DARBOUX'S LOCAL HYPERQUADRICS

The invariant condition under which the projectively connected space $P_{n,n+1}$ with the invariant field of Darboux's local hyperquadrics is isomorphic to the conformly connected space $C_{n,n}$, is found.

УДК 514.76

А.Я. Султанов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ЛИФТЫ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

На расслоении Вейля, порядок которого равен двум, построены горизонтальные лифты тензорных полей и линейных связностей.

§ 1. Алгебры Вейля и расслоения Вейля

Расслоения Вейля порождаются гладкими многообразиями и алгебрами Вейля [1]. Введению этих понятий посвящен настоящий параграф.