УДК 514.76.

Н.С. Султанова

(Пензенская государственная архитектурно-строительная академия)

О РАЗМЕРНОСТИ ПОЛНОЙ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ КОКАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА

Доказано, что размерность группы движений кокасательного расслоения со связностью ∇^H над (M_n, ∇) не больше, чем $4n(n-1)+6$, при условии, что тензорное поле кручения $T \neq 0$.

§ 1. Основные определения и факты

Пусть M_n – связное гладкое многообразие класса C^∞, $T^*(M_n)$ – его кокасательное расслоение. Приведем определения некоторых лифтов, которые потребуются в дальнейшем. Все рассматриваемые объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Для любой функции *f*, заданной на M_n, функция $f_{(0)} = f \circ \pi$, где $\pi : T^*(M_n) \to M_n$ – каноническая проекция, называется вертикальным лифтом. Пусть $p_x \in T^*(M_n)$ – произвольная точка расслоения $T^*(M_n)$. Каждое векторное поле X на M_n порождает функцию γX, определенную на $T^*(M_n)$ условием $\gamma X(p_x) = p_x(X_x)$.

На $T^*(M_n)$ существует глобально определенное векторное поле *L* Лиувилля, удовлетворяющее условию $L\gamma X = \gamma X$. Для каждого векторного поля *X*, заданного на M_n, существует единственное векторное поле $X^{(0)}$, называемое полным лифтом *X*, удовлетворяющее условию $X^{(0)}(\gamma Z) = \gamma[X, Z]$ для произвольного векторного поля *Z* на M_n. Пусть ω – линейная форма, заданная на M_n. На $T^*(M_n)$ существует единственное векторное поле $\omega_{[0]}$, удовлетворяющее условию $\omega_{[0]}(\gamma Z) = \gamma\omega(Z)(0)$. Векторное поле $\omega_{[0]}$ – вертикальное [1].

Для векторного поля *F* – типа (1,1), заданного на M_n, существует единственное векторное поле $\gamma^* F$ на $T^*(M_n)$, удовлетворяющее условию $\gamma^* F(\gamma Z) = \gamma(F(X))$, и единственное ковекторное поле γF, удовлетворяющее условию $\gamma^* F\left(Z^{(0)}\right) = \gamma(F(Z))$.

Предположим, что на M_n задана линейная связность ∇. Тогда можно определить на $T^*(M_n)$ горизонтальные продолжения векторных полей, а также построить горизонтальный лифт связности ∇^H.

Для векторного поля X существует единственное векторное поле X^H – его горизонтальный лифт на $T^*(M_n)$ – и ковекторное поле X^{H^*}, которые определяются равенствами:

$$X^H = X^{(0)} + \gamma^* \hat{\nabla} X,$$

где $\hat{\nabla}$ – линейная связность, определенная условием: $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$,

$$X^{H^*} = d(\gamma X) - \gamma \nabla X.$$

Здесь $d(\gamma X)$ – дифференциал функции γX. Заметим, что имеют место тождества:

$$X^{H^*}(Y^H) = 0, \quad (1.1)$$

$$X^{H^*}(\gamma^* F) = \gamma(F(X)). \quad (1.2)$$

Горизонтальный лифт ∇^H линейной связности определяется условиями:

$$\nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \nabla^H_{X^H} \omega_{[0]} = (\nabla_X \omega)_{[0]}, \nabla^H_{\omega_{[0]}} X^H = 0, \nabla^H_{\omega_{[0]}} \theta_{[0]} = 0.$$

Тензорные поля T^H, R^H кручения и кривизны связности ∇^H удовлетворяют тождествам:

$$T^H(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - \gamma^*(R(X,Y)), \quad (1.3)$$

$$R^H(X^H, Y^H)Z^H = (R(X,Y)Z)^H, \quad R^H(X^H, Y^H)\omega_{[0]} = -(\omega \circ R(X,Y))_{[0]},$$

$T^H(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0, \quad R^H(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$, если хотя бы одно поле $\tilde{X}$ или $\tilde{Y}$ вертикальное.

§ 2. Полусимметрические связности ∇^H

Выясним, как устроены полусимметрические (по А.П. Нордену) линейные связности ∇^H на $T^*(M_n)$. Линейная связность ∇ на дифференцируемом многообразии M_n называется полусимметрической, если существует линейная форма ω на M_n такая, что тензорное поле кручения T удовлетворяет тождеству [2]:

$$T(X,Y) = \omega(X)Y - \omega(Y)X.$$

Предположим, что связность ∇^H - полусимметрическая. Тогда

$$T^H(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{\omega}(\tilde{X})\tilde{Y} - \tilde{\omega}(\tilde{Y})\tilde{X}$$

для некоторой линейной формы $\tilde{\omega}$ на $T^*(M_n)$ и произвольных векторных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}$. Учитывая тождества для T^H, получим

$$\tilde{\omega}(X^H)\theta_{[0]} - \tilde{\omega}(\theta_{[0]})X^H = 0. \quad (2.1)$$

Так как $\theta_{[0]}$ – вертикальное, X^H- горизонтальное векторные поля, то из (2.1) следует $\tilde{\omega}(X^H) = 0$, $\tilde{\omega}(\theta_{[0]}) = 0$ для любых $X \in T^1_0(M_n)$, $\theta \in T^1_0(M_n)$, поэтому $\tilde{\omega} = 0$. Таким образом, $T^H = 0$.

Из тождества (1.3) следует

$$\left(T(X,Y)\right)^H - \gamma^*\left(R(X,Y)\right) = 0. \qquad (2.2)$$

Для произвольного векторного поля $Z \in T_0^1(M_n)$ на основании тождеств (1.1), (1.2) из (2.2) получим

$$Z^{H^*}\left(T^H(X,Y)^H - \gamma^*\left(R(X,Y)\right)\right) = \gamma\left(R(X,Y)Z\right) = 0.$$

Пусть ω – произвольная линейная форма на M_n. Тогда $\omega_{[0]}\left(\gamma\left(R(X,Y)Z\right)\right) = 0$, или $\omega\left(R(X,Y)Z\right) = 0$. В силу произвольности векторных полей X, Y, Z и линейной формы ω отсюда получим $R = 0$. Следовательно, тождество (2.2) примет вид: $\left(T(X,Y)\right)^H = 0$.

Для произвольной $\omega \in T_1^0(M_n)$ имеем $\omega_{(0)}\left(T(X,Y)\right)^H = 0$, или $\left(\omega\left(T(X,Y)\right)\right)_{(0)} = 0$. Отсюда следует $T = 0$.

Обратно, если $T = 0, R = 0$, то $T^H = 0$; следовательно, ∇^H – полусимметрическая. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть на гладком многообразии* M_n *задана линейная связность* ∇, *а* ∇^H - *ее горизонтальный лифт на* $T^*(M_n)$. *Следующие условия эквивалентны: 1)* ∇^H *– полусимметрическая, 2)* ∇ *– локально плоская.*

§ 3. О размерности полных групп движений

Пусть на базе M_n кокасательного расслоения $T^*(M_n)$ задана линейная связность ∇ такая, что $T \neq 0$.

Теорема 2. *Максимальная размерность полных групп аффинных преобразований пространств* $\left(T^*(M_n), \nabla^H\right)$ *не больше, чем* $4n(n-1)+6$.

Доказательство. Так как $T \neq 0$, то по теореме 1 связность ∇^H не является полусимметрической. По теореме, доказанной И.П. Егоровым [3], максимальная размерность групп движений не больше, чем $m^2 - 2m + 6$, где

$$m = \dim T^*(M_n) = 2n.$$

Приведенная в этой теореме граница – точная. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{R}^n$, на котором связность ∇ задана компонентами $\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = 1$, остальные $\Gamma_{jk}^i = 0$. Пространство (T^*($\boldsymbol{R}^n$),∇^H) допускает полную группу движений размерности $4n(n-1)+6$.

Список литературы

1. *Yano K., Ishihara Sh.* Tangent and cotangent bundles; differential geometry. New York, 1973.

2. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М; Л., 1950.

3. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности: Уч. зап. Казань, 1965. С. 5 – 179.

N. Sultanova

ON THE DIMENSION OF MOTION COMPLETE GROUPS
OF THE COTANGENT WITH BUNDLE A HORIZONTAL LIFT CONNECTION

It is proved that the dimension of groupe of motion cotangens bundles with connections ∇^H over (M_n, ∇) is not more than $4n(n-1)+6$ on condition that torsion tensor field $T \neq 0$.

УДК 514.75

М.А. Чешкова

(Алтайский государственный университет)

О МИНИМАЛЬНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{E}^n$

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^4 гиперповерхность M, у которой главные кривизны различные. Тогда определится сеть линий кривизны.

Теорема. Если у минимальной гиперповерхности M в E^4, несущей голономную сеть линий кривизны, две линии кривизны геодезические, то гиперповерхность M есть цилиндр над катеноидом.

1. Основные формулы. Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^4. Обозначим $F(M) - R$-алгебру дифференцируемых на M функций, T_s^q – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s), $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M, ∂ – дифференцирование и $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^4. Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + b(X,Y)n, \quad \partial_X n = -AX, \tag{1}$$

где $A \in T_1^1(M), X, Y \in \chi(M), b \in T_2^0(M), b(X,Y) = \langle AX, Y\rangle$ – вторая фундаментальная форма, A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$. Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци:

$$R(X,Y)Z = b(Y,Z)AX - b(X,Z)AY, \; dA(X,Y) = 0, \tag{2}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇. Обозначим через $X_i, i = 1,2,3$ – орты главных направлений, k_i – главные кривизны. Тогда $AX_i = k_i X_i$. Рассмотрим $dA(X_i, X_j) = 0, i \neq j$. Имеем